



Posgrado en  
Optimización

Universidad  
Autónoma  
Metropolitana  
Casa abierta al tiempo **Azcapotzalco**



División de Ciencias Básicas e Ingeniería

## **Resolución de problemas de sistemas de producción cíclica aplicando el índice cromático circular**

Tesis para obtener el grado de

MAESTRO EN OPTIMIZACIÓN

por

José de Jesús Rodríguez Martínez

Asesor:

Dra. María Guadalupe Rodríguez Sánchez

24 de febrero de 2016



# Comité

---

**Nombre:** José de Jesús Rodríguez

**Grado:** Maestro en Optimización

**Título de la tesis:** Resolución de problemas de sistemas de producción cíclica aplicando el índice cromático circular

**Comite evaluador:**

---

Dr. Rafael López Bracho  
Presidente

---

Dra. Laura Elena Chávez Lomelí  
Secretaria

---

Dr. David Romero Vargas  
Vocal

---

Dr. Alejandro Aguilar Zavoznik  
Vocal

---

Dra. María Guadalupe Rodríguez Sánchez  
Asesor, vocal

**Fecha aprobada:** Febrero 25, 2016



# Dedicatoria

---

A mi más preciado tesoro, mi hijo **Jesús Abdiel**,  
que cada momento me enseña a vivir la vida,  
día a día, él llena de alegría y dicha mi existir.



# Agradecimientos

---

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a la Dra. María Guadalupe Rodríguez Sánchez, no sólo por haber dirigido este trabajo, sino también por sus excelentes consejos, su constante apoyo moral y por toda su dedicación a fin de que esta humilde tesis queda concluída.

Agradezco a mi comité tutorial integrado por los doctores; Dra. Laura Elena Chávez Lomelí, Dr. Rafael López Bracho, Dr. Alejandro Aguilar Zavoznik y Dr. David Romero Vargas, por su tiempo, sus enseñanzas y las sugerencias para este trabajo de manera que esté lleva un poco de cada uno de ellos.

También agradezco la invitación al taller del grupo de trabajo de la Dra. Guadalupe Rodríguez, donde se discuten problemas interesantes. De este taller salieron maravillosas ideas y considero un honor ser parte de ellos.

Al Dr. Antonin Ponsich Sebastien a quien también agradezco, en primer lugar, por los cursos impartidos, por su paciencia, orientación y atención a cada uno de ellos. En segundo lugar por el material facilitado y las sugerencias recibidas para cada uno de los métodos heurísticos programados.

Asimismo, quiero expresar mi reconocimiento a todos los profesores del posgrado en optimización de la generación 2013 – 2015 de la UAM Azcapotzalco, en particular a los profesores: Dr. Francisco Javier Zaragoza Martínez, Dr. Óscar Alvarado Nava, Dr. Eric Alfredo Rincón García y Dr. Eduardo Rodríguez Martínez.

También quiero agradecer al Dr. Javier Ramírez Rodríguez y al Dr. Javier López Bracho por su apoyo como cordinadores de la maestría en optimización, por gestionar recursos para asistir a eventos que nos han sido cruciales para nuestra formación.

Gracias a mis amigos Ernesto Castelán Chávez y Fabián Guillermo Galván Cardoso, que me han prestado un gran apoyo moral y humano, necesarios en los momentos difíciles, en especial con su apoyo en la implementación de técnicas de programación.

Gracias a mis compañeros de seminario Rodrigo Alexander Castro Campos, Luis Eduardo Urbán Rivero, Luis Francisco Hernández Sánchez, Sergio Luis Pérez, Eduardo Rojas Silva, José Roberto Méndez Rosiles, Juan Cornelio Bautista Hernández, Alberto Alejandro Vázquez Cortés, Gualberto Vázquez Casas, Angélica García García, Andrés Flores Reyna y Naim Reyes Hernández, que han prestado su trabajo y valiosas sugerencias en momentos de duda.

También quiero dar las gracias al Dr. David Romero Vargas por sus consejos en mi vida personal, los cuales me han motivado y dado confianza en mi persona. Por compartir conmigo sus conocimientos en la redacción de este trabajo y por ser un ejemplo de vida.

Pero, sobre todo, le doy gracias a mis padres Merarí Martínez Navor y Jesús Rodríguez Salgado por su paciencia y comprensión con este proyecto, por el tiempo y apoyo económico que me han brindado. A mis hermanas Berenice y Diana Rodríguez Martínez por ser parte de mi vida y que en todo momento me han apoyado incondicionalmente.

Gracias a Lorena Díaz González por ser mi inspiración en el camino de la investigación, por su apoyo moral, solidaridad y por ser mi compañera de vida.

Gracias a TODOS por hacer esta tesis posible.

---



# Resumen

---

En una gráfica  $G$ , el concepto de número cromático circular  $\chi_c(G)$  fué introducido por Vince en 1988. Este invariante es una generalización del número cromático  $\chi(G)$  de una gráfica y provee de una información más refinada de las características de la asignación de colores a los vértices de  $G$ .

Este trabajo trata sobre la coloración de aristas de una gráfica, mediante el concepto de índice cromático circular  $\chi'_c(G)$  como un refinamiento del índice cromático  $\chi'(G)$ . Los invariantes  $\chi_c(G)$  y  $\chi'_c(G)$  están relacionados, dado que cualquier coloración de las aristas de  $G$  es equivalente a colorear los vértices de la gráfica de líneas  $L(G)$ .

En el capítulo 1 se presenta información detallada sobre conceptos fundamentales de este trabajo.

El índice cromático circular permite ayudar a resolver un tipo de problemas de asignación que se plantean en sistemas de producción cíclica. Estos problemas se pueden modelar en una gráfica bipartita donde el peso de la arista  $e = (u, v)$  corresponde al tiempo de ejecución de la tarea  $u$  realizada en la máquina  $v$ .

En el capítulo 2 se presentan dos conceptos equivalentes: una  $r$ -coloración cromática circular y una  $(k, d)$ -coloración de las aristas de una gráfica. Ambos conceptos se refieren el índice cromático circular  $\chi'_c(G)$ . Asimismo, en este capítulo: (i) se comparan las cotas de  $\chi'_c(G)$  con respecto a otros parámetros de la gráfica; (ii) se obtiene el  $\chi'_c(G)$  para gráficas que tienen una función de peso asociada a sus aristas; y, (iii) finalmente, se entafiza que es un problema NP-duro el cálculo del valor de  $\chi_c(G)$  para una gráfica dada  $G$ .

En el capítulo 3 se presenta un resumen de familias de gráficas para las cuales se ha logrado determinar el valor de  $\chi'_c(G)$ . Este conjunto está constituido por: (i) gráficas de ruedas multieje  $W_{p,q}$ ; (ii) gráficas  $N_p$ ; (iii) gráficas snarks, en donde destacan: Petersen, Descartes, Szekeres, Flores, Blanuša, Blanuša tipo 1 y Goldberg. Se extienden la últimas dos familias mediante el pegado de ciclos  $C_{s+1}$  por trayectorias de longitud 1 y 2, dando lugar a nuevas familias, de las cuales se conoce su índice cromático circular.

En el capítulo 4 se presenta una aplicación del concepto de coloración circular para modelar un sistema de producción cíclica conocido como *open shop scheduling*. En este tipo de problemas se tienen  $n$  trabajos que deben ser procesados en  $m$  máquinas. Cada trabajo consiste de un conjunto de tareas, las cuales tienen un tiempo de procesamiento en cada máquina en la que se puede realizar. El problema se modela mediante una gráfica bipartita  $(G)$ , donde se tienen dos conjuntos de vértices, el conjunto de trabajos  $J_i$  y el conjunto de máquinas  $M_j$ . Una arista corresponde a una tarea asociada

al trabajo  $i$ , que debe ser procesada en la máquina  $j$ , la cual se efectúa sin interrupciones. El peso asociado a la arista  $ij$  es el tiempo necesario para procesar la tarea  $ij$ . El objetivo es encontrar la mínima  $r$ -coloración circular por aristas de  $(G)$ , dado que ésta es equivalente a encontrar la asignación tal que el tiempo necesario para procesar todas las tareas sea el mínimo. Asimismo, en este capítulo se presenta la implementación de tres algoritmos que aproximan el ciclo más pequeño para ejecutar todas las tareas, los cuales se describen a continuación: (i) el primero es una combinación de un problema de programación lineal con la heurística conocida como búsqueda en vecindades variables; y, (ii) los siguientes dos son una combinación de la resolución de un conjunto de problemas de programación lineal con algoritmos genéticos. Estas técnicas son algunas formas de resolver la asignación a sistemas de producción cíclica; las instancias que se utilizan en este trabajo son tomadas de E. Taillard (ver página <http://mistic.heig-vd.ch/>).

---

# Contenido

---

<b>Lista de Figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Definiciones y propiedades básicas del índice cromático circular</b>	<b>9</b>
2.1. Número cromático circular . . . . .	9
2.2. Índice cromático circular . . . . .	10
2.2.1. Cotas principales para el índice cromático circular . . . . .	12
2.3. Índice cromático circular de gráficas con pesos $(G, w)$ . . . . .	13
2.4. Gráfica de líneas $L(G)$ . . . . .	14
<b>3. Familias de gráficas con índice cromático circular conocido</b>	<b>17</b>
3.1. Tabla de familias de gráficas con $\chi'_c(G)$ conocido . . . . .	17
3.2. Familias de gráficas no cúbicas con $\chi'_c(G)$ conocido . . . . .	17
3.2.1. Ruedas Multieje $W_{p,q}$ . . . . .	18
3.2.2. Gráficas $N_p$ . . . . .	18
3.3. Snarks . . . . .	19
3.3.1. Gráfica de Petersen . . . . .	20
3.3.2. Gráfica de Blanuša . . . . .	20
3.3.3. Flores . . . . .	21
3.4. Familias nuevas de snarks . . . . .	22
3.4.1. Familia de snarks de Blanuša tipo 1 . . . . .	22
3.4.2. Familia de snarks de Goldberg . . . . .	24
3.4.3. Pegado de gráficas por trayectorias . . . . .	25
<b>4. Aplicación de la coloración circular en sistemas de producción cíclica</b>	<b>35</b>
4.1. Terminología básica y presentación del problema . . . . .	36
4.2. Complejidad computacional . . . . .	37
4.2.1. Acerca del cálculo de $\chi_c$ y $\chi'_c$ . . . . .	37
4.2.2. Acerca del problema de producción cíclica . . . . .	37
4.3. Modelo de programación lineal . . . . .	37
4.3.1. Métodos conocidos . . . . .	38
4.3.2. Variables del modelo matemático . . . . .	38

4.4. Gráficas con pesos unitarios en sus aristas . . . . .	39
4.4.1. Búsqueda en vecindades variables . . . . .	39
4.4.2. Software . . . . .	41
4.5. Modelo para gráficas con pesos en sus aristas . . . . .	41
4.5.1. Algoritmo genético . . . . .	43
4.5.2. Ejemplo . . . . .	46
4.5.3. Resultado . . . . .	50
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>51</b>
<b>Referencias</b>	<b>53</b>

---

# Lista de Figuras

---

1.1.	$a)$ Río Pregel con sus 7 puentes, $b)$ Gráfica asociada.	3
1.2.	$(5,2)$ -coloración circular de $G$ .	5
1.3.	$(2.5)$ -coloración circular de $C_5$ .	5
1.4.	6-coloración circular por aristas de $(G, w)$ .	6
2.1.	$(7, 3)$ -coloración de los vértices del ciclo $C_7$ .	10
2.2.	Una $(7, 3)$ -coloración de las aristas del ciclo $C_7$ .	11
2.3.	Ciclo $C_5$ , una 2.5-coloración circular de $C_5$ vista en la círculo $C^{2.5}$ y una $[0, 2.5)$ -coloración circular de $C_5$ vista en el intervalo $[0, r)$ .	11
2.4.	$a)$ Gráfica con pesos en sus aristas y $b)$ 6-coloración circular sobre $C_6$ .	14
3.1.	Ruedas multiteje: $W_{4,1} = W_4$ , $W_{4,2}$ y $W_{6,4}$ .	18
3.2.	Construcción de $N_p$ : $a)$ Diamante; $b)$ una gráfica $N_p$ .	19
3.3.	Gráfica de Petersen	20
3.4.	Snark de Szekeres	20
3.5.	$(11, 3)$ -coloración de Petersen	21
3.6.	$(11, 3)$ -coloración de Blanuša	21
3.7.	Flor snark $J_3$ .	22
3.8.	Flor snark $J_5$ .	22
3.9.	Bloque Fundamental	23
3.10.	Una generalización de Snark Blanuša tipo 1	23
3.11.	Una $(9m + 2, 3m)$ -coloración de las aristas de $B_m^1$	24
3.12.	Snark de Goldberg $G_k$	24
3.13.	Snark de Goldberg cruzado $TG_k$	25
3.14.	Una $(10, 3)$ -coloración circular de las aristas de $G_3$ y $TG_3$ .	25
3.15.	$JG_k$ con $k \geq 5$ , tiene una $(13, 4)$ coloración circular.	26
3.16.	Gráfica cúbica isomorfa al bloque fundamental de snark Blanuša tipo 1.	26
3.17.	Dos ciclos $C_7$ pegados por una trayectoria.	27
3.18.	$C_7 \circ_1 C_7$ pegados por una trayectoria de tamaño uno.	27
3.19.	Arista $uv$ con $C_7 \circ_1 C_7$ .	28
3.20.	Índice Cromático Circular $C_7 \circ_1 C_7$ .	28
3.21.	Índice Cromático Circular $C_{2k+1} \circ_1 C_{2k+1}$ .	29
3.22.	$C_5 \circ_1 C_7$ pegado por una trayectoria tamaño uno.	29
3.23.	$C_5 \circ_1 C_{2k+1}$ pegado por una trayectoria tamaño uno.	30
3.24.	$C_5 \circ_2 C_5$ .	30

---

3.25. $C_7 \circ_2 C_7$ . . . . .	31
3.26. $JG_7^7$ con una $(13, 4)$ -coloración circular. . . . .	31
3.27. $JG_m^7$ con una $(13, 4)$ -coloración circular ( $m \geq 5$ , impar). . . . .	31
3.28. $(13, 4)$ -coloración circular de $JG_7^9$ . . . . .	32
3.29. 3-coloración circular de dos $C_7$ con trayectoria tamaño 3. . . . .	32
3.30. Dos $C_7$ con trayectoria tamaño 3. . . . .	33
3.31. Una 3-coloración circular de $C_7 \circ_3 C_7$ . . . . .	33
4.1. Gráfica bipartita con pesos $(G, w)$ . . . . .	36
4.2. Tamaño del vecindario para $G$ de grado 6. . . . .	40
4.3. Población inicial. . . . .	46
4.4. Tasa de cruza. . . . .	46
4.5. Cruza de Orden Lineal. . . . .	47
4.6. Mutación por Inserción. . . . .	47
4.7. Tasa de Mutación. . . . .	48
4.8. Mutación por swap. . . . .	48
4.9. Tasa de Mutación swap. . . . .	49
4.10. a) Gráfica de asignación y b) Gráfica de líneas asociada. . . . .	49
4.11. Solución del problema de programación lineal. . . . .	50

---

# Lista de Tablas

---

3.1. Índice cromático circular de algunas gráficas. . . . .	17
4.1. Número de gráficas con $\chi_c(G) < \chi(G)$ de grado a lo más 9. . . . .	41
4.2. Algoritmo con mutación por inserción. . . . .	45
4.3. Algoritmo con mutación por swap. . . . .	45
4.4. Tabla de resultados de las instancias propuestas por E. Taillard. . . . .	50





# Lista de algoritmos

---

4.1. Algoritmo de búsqueda en vecindades variables . . . . .	42
4.2. Algoritmo genético . . . . .	44



# Introducción

---

La teoría de gráficas o conocida también por teoría de grafos es una rama de la Combinatoria, en la que algunos problemas matemáticos se modelan y resuelven utilizando representaciones gráficas, convirtiéndose estas en una herramienta muy poderosa en la solución de problemas complejos.

El primer artículo en teoría de gráficas fue escrito por Leonhard Euler en 1736 [4]. En éste se plantea el siguiente problema: en la ciudad de Königsberg pasa el río Pregel, hay dos islas unidas entre sí por un puente, las islas se conectan a la ribera por seis puentes como se muestra en la Figura (1.1) *a*). El problema consiste en iniciar un recorrido en alguna de las cuatro porciones de tierra separadas por las aguas del río, atravesar por cada puente exactamente una vez y regresar al punto de inicio después de pasar por todos los puentes. Euler demostró rigurosamente que era imposible realizar el recorrido propuesto; para ello utilizó por primera vez el concepto de gráfica como se conoce a la fecha, representando cada porción de tierra por un vértice y cada puente por una arista, de modo que dos vértices adyacentes en la gráfica indicaban dos porciones de tierra unidas mediante uno de los puentes como se muestra en la Figura (1.1) *b*). De hecho, Euler no sólo respondió al problema original sino que logró dar una condición necesaria y suficiente para decidir si una gráfica cualquiera contiene un recorrido, que pase por todas y cada una de sus aristas exactamente una vez, tal que el vértice de inicio y el vértice final del recorrido coincidan.

Otro problema importante en la teoría de gráficas fué formulado en el siglo XIX, éste es el problema de los cuatro colores que fue resuelto computacionalmente por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976 [2]. El problema se enuncia como: dado un mapa se requieren a lo más cuatro colores para pintar todas las regiones del mapa de modo que dos regiones adyacentes tengan distinto color.

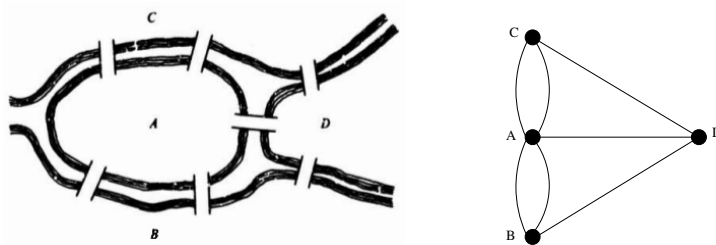


Figura 1.1: *a*) Río Pregel con sus 7 puentes, *b*) Gráfica asociada.

Se define una gráfica como una tripleta  $G = (V, E, \psi)$  que consta de un conjunto finito no vacío  $V$  de vértices, un conjunto  $E$ , disjunto de  $V$ , de aristas, junto con una función de incidencia  $\psi$  que asocia con una arista de  $G$  un par no ordenado (no necesariamente distintos) de vértices de  $G$ . Si  $e$  es una arista y  $u$  y  $v$  son vértices que  $\psi(e) = uv$ , entonces  $e$  une a  $u$  y  $v$ .

También se define una gráfica simple si no tiene loops ni aristas dobles entre vértices. Una gráfica no tiene puentes si al quitar cualquier arista de ella, ésta queda en una pieza.

En este tesis se trabaja con gráficas simples y se usan los símbolos  $V(G)$ ,  $E(G)$  para representar los conjunto de vértices y aristas de  $G$ , respectivamente. Los vértices serán representados por puntos y las aristas por líneas que unen pares de vértices disjuntos.

Se entiende por una coloración propia de los vértices de  $G$ , a la función  $c : V(G) \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto de  $k$  colores  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , tal que  $c(v) \neq c(w)$  si  $v$  y  $w$  son vértices adyacentes, es decir, si están unidos por una arista. Decimos que  $G$  es  $k$ -coloreable si existe una coloración propia de los vértices de  $G$  con  $k$  colores. Al entero más pequeño  $k$ , para el cual  $G$  es  $k$ -coloreable, se le denomina número cromático de  $G$  y se denota por  $\chi(G)$ .

Equivalentemente a una coloración propia de los vértices de  $G$  se define una coloración propia de sus aristas como una función  $c : E(G) \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto de  $k$  colores  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , tal que  $c(e_1) \neq c(e_2)$  si  $e_1$  y  $e_2$  son aristas incidentes. Decimos que  $G$ , es  $k$ -coloreable por aristas, si existe una coloración propia de las aristas de  $G$  con  $k$  colores. Al entero más pequeño  $k$ , para el cual  $G$  es  $k$ -coloreable por aristas, se le denomina índice cromático de  $G$  y se denota por  $\chi'(G)$ . Peter Guthrie Tait demostró que el teorema de los cuatro colores es equivalente a la afirmación de que toda gráfica plana cúbica sin puentes es 3-coloreable por aristas, ver [10].

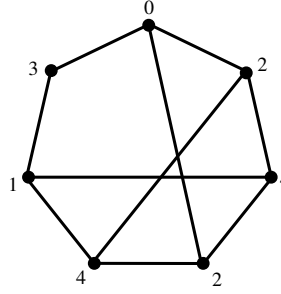
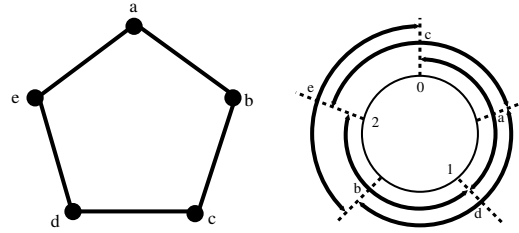
En 1988 surgió un nuevo concepto para la coloración de vértices de una gráfica, dado por Vince [27], bajo el nombre *star coloring*, este concepto puede verse como una generalización de la coloración propia y se le denomina **coloración circular**. Se sabe que la coloración circular es un refinamiento de la coloración propia, lo que da lugar a un mayor conocimiento de la estructura de la gráfica.

Una  $(k, d)$ -coloración circular de los vértices de  $G$  es una función  $c : V(G) \rightarrow S$ , donde  $k, d \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $k \geq 2d$  y  $S$  es un conjunto de colores  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , tal que la función  $c$  cumple  $d \leq |c(v) - c(w)| \leq k - d$  si  $v$  y  $w$  son vértices adyacentes en  $G$ . Se dice que  $G$ , es  $(k, d)$ -coloreable por vértices, si existe una  $(k, d)$ -coloración circular de los vértices de  $G$ . Al ínfimo de los  $\frac{k}{d}$  para el cual  $G$  es  $(k, d)$ -coloreable por vértices, se le denomina **número cromático circular de  $G$**  y se denota por  $\chi_c(G)$ .

**Ejemplo 1** La Figura (1.2) muestra una  $(5, 2)$ -coloración circular de los vértices de la gráfica  $G$ .

Existen otras formas de definir el número cromático circular de  $G$ . Probablemente la definición más conocida y que justifica el adjetivo circular aplicado a la coloración es la siguiente:

Sea  $r \geq 2$  un número real y sea  $C^r$  el círculo (Euclideo) de perímetro  $r$ . Una  $r$ -coloración circular de los vértices de  $G$  es una asignación  $c$  de intervalos unitarios de  $C^r$  a los vértices de  $G$  tal que para cualesquiera vértices adyacentes  $v_1$  y  $v_2$ , los intervalos asociados  $c(v_1)$  y  $c(v_2)$  son disjuntos.

Figura 1.2:  $(5,2)$ -coloración circular de  $G$ .Figura 1.3:  $(2,5)$ -coloración circular de  $C_5$ .

Se dice que  $G$  es  $r$ -coloreable, si existe una  $r$ -coloración circular de  $G$ . El **número cromático circular**  $\chi_c(G)$ , es el ínfimo de los  $r$  tal que  $G$  es  $r$ -coloreable.

**Ejemplo 2** La Figura (1.3) muestra una  $(2,5)$ -coloración circular de los vértices del ciclo  $C_5$ .

En este trabajo nos enfocamos a las dos definiciones mencionadas. Se ha demostrado que estas formas son equivalentes entre sí, ver [10], [31].

Análogamente, podemos pensar en una coloración circular de las aristas de  $G$ . Una  $(k, d)$ -coloración circular por aristas de  $G$  es una función  $c : E \rightarrow S$ , que cumple  $d \leq |c(e_1) - c(e_2)| \leq k - d$  si  $e_1$  y  $e_2$  son aristas incidentes en  $G$ . Decimos que  $G$ , es  $(k, d)$ -coloreable por aristas, si existe una  $(k, d)$ -coloración circular de las aristas en  $G$ . Al ínfimo de los  $\frac{k}{d}$  para el cual  $G$  es  $(k, d)$ -coloreable por aristas, se le denomina **índice cromático circular de  $G$**  y se denota por  $\chi'_c(G)$ .

Un teorema fundamental con respecto al índice cromático  $\chi'(G)$ , es el teorema de Vizing, el cual divide a las gráficas en dos clases: las que tienen índice cromático igual al grado máximo de los vértices de  $G$ , denotado por  $\Delta$  y aquellas que requieren un color más para poder colorear propiamente las aristas de la gráfica. Considerando las gráficas de la segunda clase, esta se divide en dos subclases: la primera con  $\chi'_c(G) = \chi'(G) = \Delta + 1$ , la segunda con  $\Delta < \chi'_c(G) < \chi'(G) = \Delta + 1$ , donde  $\chi'_c(G)$  es un número racional entre  $\Delta$  y  $\Delta + 1$ .

Se define el par ordenado  $(G, w)$  una gráfica con pesos en sus aristas donde  $G$  es una gráfica simple y  $w$  una función de peso que asigna a cada arista de  $G$  un número racional. Una  $r$ -coloración circular por aristas de  $(G, w)$  es una función  $c : E \rightarrow C$  de las aristas de  $G$  a intervalos sobre  $C^r$ , tal que para toda arista  $e \in (G, w)$  la longitud de  $c(e)$  es igual  $w(e)$  y para cualesquiera par de aristas incidentes  $e_1, e_2$  los intervalos  $c(e_1)$  y  $c(e_2)$  son disjuntos.

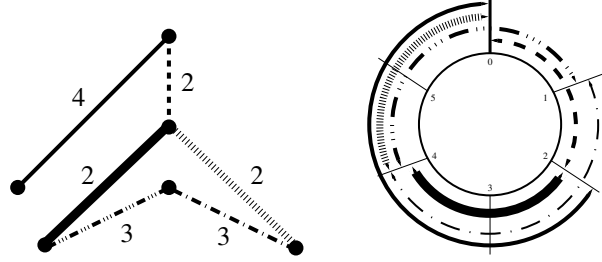


Figura 1.4: 6-coloración circular por aristas de  $(G, w)$ .

**Ejemplo 3** La Figura (1.4) muestra una 6-coloración circular por aristas de  $(G, w)$ .

El índice cromático circular  $\chi'_c(G, W)$  es el mínimo de los valores de  $r$  para el cual existe una  $r$ -coloración circular de  $(G, W)$ .

En la Sección 3 se hace un resumen de las familias de gráficas cuya coloración circular por aristas se conoce. Desde hace más de dos décadas ha existido un gran interés por conocer la estructura sobre la familia de snarks, los cuales tienen la propiedad de ser gráficas cúbicas sin puentes y que no tienen una 3 coloración de sus aristas. En esta familia se sabe existen dos subfamilias para las cuales se conoce su índice cromático circular: familia snark de Blanuša tipo 1 [20] y familia snark de Goldberg [22]. Definimos la operación entre gráficas por el pegado mediante trayectorias de longitud positiva. Por medio de ella obtenemos los bloques fundamentales de las familias anteriores. Así que variando un poco las gráficas iniciales, tenemos como resultado que ambas familias se pueden extender y más aún también podemos extender su coloración circular y por tanto encontrar su índice cromático circular, respectivamente.

La coloración circular de las aristas de una gráfica  $(G, w)$  se puede aplicar a problemas de sistemas de producción cíclica conocidos como una clase especial de open shop scheduling problems. Se desarrolla un modelo de asignación para el cual se considera un número finito de trabajos y de máquinas. Cada trabajo contiene un número finito de tareas, donde cada tarea es procesada en las máquinas en cierto tiempo, respectivamente. Esta situación puede modelarse con una gráfica bipartita, donde una partición de los vértices representan los procesadores, mientras la otra parte de la partición consiste de vértices que representan los trabajos y las aristas corresponden a las tareas. A esta gráfica se le llama *gráfica de asignación*.

Se sabe que la coloración circular es equivalente a encontrar una asignación a un problema open shop, es decir, encontrar el índice cromático de la gráfica de asignación es equivalente a encontrar la asignación de menor tiempo que ejecute todas las tareas del problema open shop correspondiente, ver [19].

Los problemas scheduling tienen muchas aplicaciones prácticas, ver [3]. En dichos problemas hay un conjunto de trabajos los cuales son procesados por un número de máquinas. Un trabajo consiste de un conjunto de tareas, cada una de ellas se ejecuta en una máquina por un tiempo dado. Los problemas shop scheduling pueden ser clasificados como: flow shop, job shops u open shop dependiendo de las restricciones de orden de las operaciones en los trabajos. En un flow shop, cada

trabajo puede hacer a lo más una operación en una máquina y todas las tareas del mismo trabajo son procesadas en el mismo orden, es decir, cada trabajo es ejecutado en una máquina en el mismo orden. En un job shop, las operaciones de cada trabajo deben ser procesadas en un orden dado, el cual es específico para cada trabajo, aunque diferentes trabajos tienen diferentes tareas. En un open shop, no hay restricciones en el orden de las operaciones en los trabajos, ver [21].

Una *calendarización* es una asignación de periodos de tiempo que cumplen las siguientes características: dos tareas del mismo trabajo no pueden ser procesadas simultáneamente, ninguna máquina puede trabajar dos tareas al mismo tiempo y toda tarea es procesada sin interrupciones. Se requiere minimizar la longitud de la calendarización. La coloración circular de las aristas de la gráfica de asignación corresponde a una calendarización mínima del problema.

El objetivo de este trabajo es aplicar el índice cromático circular a problemas de asignación, en particular a los problemas conocidos como *cyclic open shop* mediante técnicas exactas e implementar un modelo de programación lineal combinado con la heurística búsqueda en vecindades variables, el cual determina el índice cromático de un sistema de producción cíclica. La aplicación es tratada en el capítulo 4.

Las complejidades computacionales relacionadas con el cálculo  $\chi_c(G)$  y  $\chi'_c(G)$  son: para cualquier entero fijo  $k \geq 2d$ , el problema de decisión sobre si  $\chi_c \leq k/d$  para una gráfica dada  $G$  es NP-completo [5]. Es NP-duro decidir si para una gráfica  $G$  la igualdad  $\chi_c(G) = \chi(G)$  se cumple, ver [14]. Es NP-duro encontrar el  $\chi'_c$  de una gráfica simple [26]. En [11] y [13] se demuestra que el problema de asignación es polinomial para dos máquinas, ahí también se demuestra que el problema es NP-duro para tres o más máquinas.





# Definiciones y propiedades básicas del índice cromático circular

---

**Definición 2.1** Una gráfica es una tripleta  $G = (V, E, \psi)$  que consta de un conjunto finito no vacío  $V$  de vértices, un conjunto  $E$ , disjunto de  $V$ , de aristas, junto con una función de incidencia  $\psi$  que asocia con una arista de  $G$  un par no ordenado (no necesariamente distintos) de vértices de  $G$ . Si  $e$  es una arista y  $u$  y  $v$  son vértices que  $\psi(e) = uv$ , entonces  $e$  une a  $u$  y  $v$ .

**Definición 2.2** Una gráfica  $G$  es simple si no tiene loops ni aristas dobles entre vértices.

**Definición 2.3** Una gráfica  $G$  no tiene puentes si al quitar cualquier arista de ella, ésta queda en una pieza, es decir, es 2-conexa por aristas.

**Definición 2.4** Sea  $G$  una gráfica simple. Se entiende por una **coloración propia de los vértices** de  $G$ , a la función  $c : V \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto de  $k$  colores  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , tal que  $c(v) \neq c(w)$  si  $v$  y  $w$  son vértices adyacentes, es decir, si están unidos por una arista. Decimos que  $G$ , es  **$k$ -coloreable**, si existe una coloración propia de los vértices de  $G$  con  $k$  colores. Al entero más pequeño  $k$ , para el cual  $G$  es  $k$ -coloreable, se le denomina **número cromático** de  $G$  y se denota por  $\chi(G)$ .

Se puede hallar un refinamiento de  $\chi(G)$ , admitiendo coloraciones fraccionales para  $G$ , para ello se define un nuevo concepto que es la coloración circular de  $G$ . La coloración circular tiene sus orígenes en 1988 ver [27], cuando Vince da la primera definición y la llama coloración estrella, años más tarde en 1992 ver [30], Zhu redefine el concepto de coloración estrella, dando lugar a un nuevo parámetro que llamó coloración circular. En esta tesis damos dos definiciones del número cromático circular las cuales se puede demostrar que son equivalentes.

## 2.1. Número cromático circular

**Definición 2.5** Sea  $G$  una gráfica simple. Una  $(k, d)$ -coloración de los vértices de  $G$  es una función  $c : V \rightarrow S$  que cumple

$$d \leq |c(v) - c(w)| \leq k - d$$

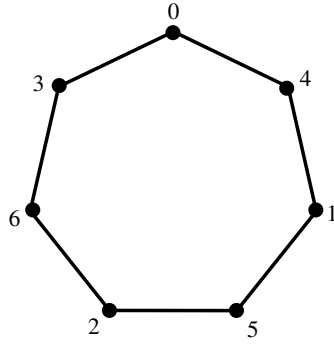


Figura 2.1:  $(7, 3)$ -coloración de los vértices del ciclo  $C_7$ .

si  $v$  y  $w$  son vértices adyacentes en  $G$ , donde  $k, d \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $k \geq 2d$  y  $S$  es un conjunto de colores  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ . Se dice que  $G$ , es  $(k, d)$ -coloreable por vértices, si existe una coloración circular de los vértices de  $G$ . Al ínfimo de los  $\frac{k}{d}$  para el cual  $G$  es  $(k, d)$ -coloreable por vértices, se le denomina **número cromático circular de  $G$**  y se denota por  $\chi_c(G)$ .

**Ejemplo 4** En la Figura (2.1) se muestra una  $(7, 3)$ -coloración de los vértices del ciclo  $C_7$ .

**Observación 2.1** Una  $(k, 1)$ -coloración es una  $k$ -coloración propia de una gráfica  $G$ .

La forma en que Zhu define el número cromático circular de  $G$  ésta dada mediante el concepto de una  $r$ -coloración circular, de la siguiente manera:

**Definición 2.6** Sea  $r \geq 2$  un número real y sea  $C^r$  el círculo (Euclidean) de perímetro  $r$ . Una  $r$ -coloración circular de los vértices de una gráfica simple  $G$  es una asignación  $c$  de intervalos unitarios de  $C^r$  a los vértices de  $G$  tal que para cualesquiera vértices adyacentes  $v_1$  y  $v_2$ , los intervalos asociados  $c(v_1)$  y  $c(v_2)$  son disjuntos. Se dice que  $G$  es  $r$ -coloreable, si existe una  $r$ -coloración circular de  $G$ . El **número cromático circular**  $\chi_c(G)$ , es el ínfimo de los  $r$  tal que  $G$  es  $r$ -coloreable.

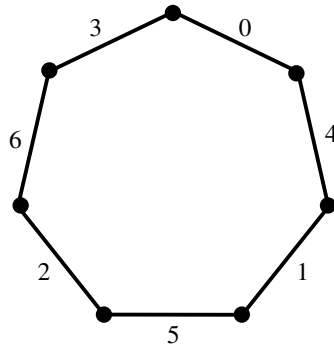
**Observación 2.2** Las definiciones (2.5) y (2.6) son equivalentes, ver [23].

## 2.2. Índice cromático circular

Análogamente las dos definiciones anteriores, se define el índice cromático circular de una gráfica en sus dos formas, las cuales son equivalentes.

**Definición 2.7** Sean  $k, d$  enteros positivos, tal que  $k \geq 2d$ . Una  $(k, d)$ -coloración de las aristas de una gráfica  $G$  es una función  $c : E \rightarrow S$ , tal que  $d \leq |c(e_1) - c(e_2)| \leq k - d$ , si  $e_1$  y  $e_2$  son aristas incidentes, donde  $S$  es el conjunto  $\{0, \dots, k-1\}$  de colores. El **índice cromático circular**  $\chi'_c(G)$ , es el ínfimo de los  $\frac{k}{d}$ , tal que  $G$  es  $(k, d)$ -coloreable.

**Ejemplo 5** En la Figura (2.2) se exhibe una  $(7, 3)$ -coloración de las aristas del ciclo  $C_7$ .

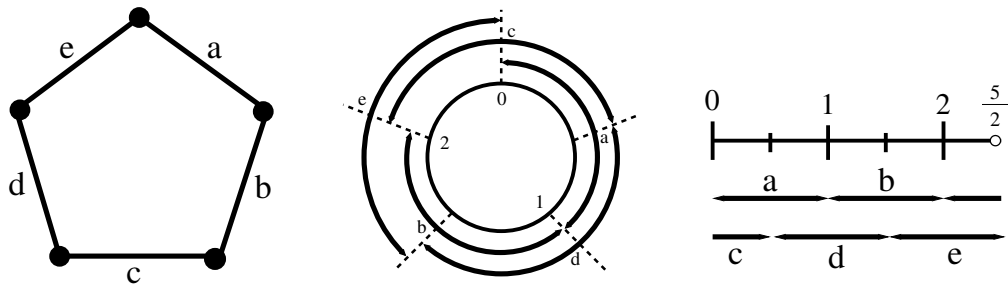
Figura 2.2: Una  $(7,3)$ -coloración de las aristas del ciclo  $C_7$ .

Ahora se presenta la definición de índice cromático circular  $\chi'_c(G)$ , usando el concepto de Zhu, de una  $r$ -coloración circular de  $G$ .

**Definición 2.8** Sea  $r \geq 2$  un número real y sea  $C^r$  el círculo (Euclideo) de perímetro  $r$ . Una  $r$ -coloración circular de las aristas de una gráfica  $G$  es una asignación  $c$  de intervalos unitarios de  $C^r$  a las aristas de  $G$  tal que para cualesquiera aristas incidentes  $e_1$  y  $e_2$ , los intervalos asociados  $c(e_1)$  y  $c(e_2)$  son disjuntos. Se dice que la gráfica  $G$  es  $r$ -coloreable, si existe una  $r$ -coloración circular de  $G$ . El índice cromático circular  $\chi'_c(G)$ , es el ínfimo de los  $r$  tal que  $G$  es  $r$ -coloreable.

Si se corta la circunferencia  $C^r$  en cualquier punto se obtendrá un intervalo de longitud  $r$  isomorfo a  $[0, r)$ . Se considera a la circunferencia orientada de acuerdo con las manecillas del reloj y se asocia 0 con el punto de corte. Si  $G$  es una gráfica que tiene una  $r$ -coloración circular, se define una función biyectiva  $c'_r : E \rightarrow [0, r)$ . Para cada intervalo  $c_r(e)$  que corresponde a una arista  $e$  de  $G$  en la  $r$ -coloración circular, se asigna  $c'_r(e)$  al punto inicial del intervalo  $c_r(e)$ . Entonces para todas las aristas  $e_1, e_2$  incidentes en  $G$  se cumple  $1 \leq |c'_r(e_1) - c'_r(e_2)| \leq r - 1$ .

En la Figura (2.3) se presenta un ciclo  $C_5$ , una 2.5-coloración vista en  $C^{2.5}$  y una  $[0, 2.5)$ -coloración circular de  $C_5$  vista en el intervalo  $[0, r)$ .

Figura 2.3: Ciclo  $C_5$ , una 2.5-coloración circular de  $C_5$  vista en la círculo  $C^{2.5}$  y una  $[0, 2.5)$ -coloración circular de  $C_5$  vista en el intervalo  $[0, r)$ .

Se puede demostrar que el valor del ínfimo en esta definición siempre se alcanza; también se sabe que el índice cromático circular es un número racional, ver [23]. En el siguiente teorema se demuestra

que  $k \leq |E(G)|$ , con lo cual se tiene una cota para  $\chi'_c(G)$ .

**Teorema 2.1** *Si  $G$  es una gráfica con  $q$  aristas, entonces  $\chi'_c(G) = \min\{\frac{k}{d} : G \text{ tiene una } (k, d)\text{-coloración con } k \leq q\}$ .*

**Demostración 1** *Consideremos una  $(k, d)$ -coloración de las aristas de  $G$  con  $\gcd(k, d) = 1$  y supongamos que  $k > q$ . Entonces existe al menos un color del conjunto  $\{0, \dots, k-1\}$  el cual no es asignado a las aristas de  $G$ . Sin pérdida de generalidad digamos el color  $d$  no es usado (permutación de colores).*

*De aquí que podemos volver a colorear las aristas de color  $2d$  por color  $2d-1$  sin violar la condición  $d \leq |c(e_i) - c(e_j)| \leq k-d$  para aristas incidentes  $e_i, e_j$ . De esta manera podemos volver a colorear las aristas de color  $ld$  por color  $ld-1$  para  $l = 2, 3, \dots, x$  donde  $x$  es el mínimo entero tal que  $xd \equiv 1 \pmod{k}$ . Puesto que  $k$  y  $d$  son coprimos,  $x$  existe. De aquí que tenemos una  $(k, d)$  coloración de las aristas de  $G$  sin una arista de color del conjunto  $S = \{d, 2d, \dots, xd\}$ .*

*Sea  $k' = k - x$ , definimos la coloración  $c' : E(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k' - 1\}$  donde la función  $c'(e) = c(e) - |\{l \in S : l \leq c(e)\}|$ . Se muestra que  $c'$  es una  $(k', d')$  coloración de aristas de  $G$  donde  $d' = d - y$  con  $y = \frac{(xd-1)}{k}$ :*

*Para cuales quiera aristas incidentes  $e_i, e_j$  tenemos  $|c(e_i) - c(e_j)| \geq d$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos  $c(e_i) < c(e_j)$ . Ya que  $1 \in S$  tenemos  $c(e_i), c(e_j) \neq 1$ . Entonces exactamente  $y$  del los colores reducidos módulo  $k$ ,  $c(e_i), c(e_i) + 1, \dots, c(e_i) + d - 1$  pertenecen a  $S$ , por tanto tenemos  $|c'(e_i) - c'(e_j)| \geq d - y = d'$ . Por otro lado, exactamente  $y$  colores de  $c(e_j), c(e_j) + 1, \dots, c(e_j) + d - 1 \pmod{k}$  pertenecen a  $S$ . Puesto que  $|c(e_i) - c(e_j)| \leq k - d$  obtenemos  $|c'(e_i) - c'(e_j)| \leq k - x - (d - y) = k' - d'$ . Vemos que  $\frac{k'}{d'} < \frac{k}{d}$  de la siguiente desigualdad:  $\frac{k'}{d'} = \frac{k-x}{d-y} = \frac{k(k-x)}{d(k-x)+1} < \frac{k}{d}$ .*

*Por lo tanto es suficiente considerar las  $(k, d)$  coloraciones de aristas con  $k \leq q$  y  $\gcd(k, d) = 1$  para determinar el  $\chi'_c(G)$ , ver [23].*

Un teorema fundamental en la coloración de las aristas de una gráfica  $G$ , es el teorema de Vizing [28], el cual dice que  $\chi'(G) = \Delta(G)$  o  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ , donde  $\Delta(G)$  es el grado máximo de los vértices de  $G$ . Este teorema permite una clasificación de las gráficas en dos clases: la clase 1 contiene a las gráficas  $G$  tales que  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , la clase 2 está formada por el conjunto de gráficas tal que  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ . En esta tesis, el interés es estudiar una clase especial que recae en la clase 2. Se consideran 2 subclases: 2a) esta formada por el conjunto de gráfica tal que  $\chi'_c(G) < \chi'(G)$ , la clase 2b) es el conjunto de gráficas tal que  $\chi'_c(G) = \chi'(G)$ , así el enfoque estará en la clase 2a).

### 2.2.1. Cotas principales para el índice cromático circular

**Lema 2.1** *Para toda gráfica  $G$  el índice cromático es una cota superior del índice cromático circular. Se tiene:*

$$\chi'(G) - 1 < \chi'_c(G) \leq \chi'(G).$$

**Demostración 2** *Ver [23].*

**Teorema 2.2** *Si  $G$  es una gráfica de clase 1, entonces  $\chi'_c(G) = \Delta(G)$ . Si  $G$  es una gráfica de clase 2, entonces  $\Delta(G) < \chi'_c(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

**Demostración 3** Supongamos que  $G$  tiene una  $(k, d)$ -coloración de las aristas de  $G$  con  $\frac{k}{d} < \Delta(G)$ . Por principio del palomar existen dos aristas adyacentes de las  $\Delta(G)$  aristas, digamos  $e_i, e_j$  tal que  $|c(e_i) - c(e_j)| \leq \frac{k}{\Delta(G)} < d$  lo cual es una contradicción a la definición de  $(k, d)$ -coloración de las aristas de  $G$ . De aquí que,  $\frac{k}{d} \geq \Delta(G)$  y concluimos que  $\chi'_c(G) = \Delta(G)$  si  $G$  es de clase 1.

Supongamos que  $G$  tiene una  $(k, d)$ -coloración  $c$  de las aristas de  $G$  con  $\frac{k}{d} \leq \chi'(G) - 1$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos  $\gcd(k, d) = 1$ . Veamos que la función  $c' : E(G) \rightarrow S = \{0, \dots, \lfloor \frac{(k-1)}{d} \rfloor\}$  tal que  $c'(e_i) = \lfloor \frac{c(e_i)}{d} \rfloor$ , nos define una  $(\chi'(G) - 1)$ -coloración de las aristas de  $G$ , lo cual es una contradicción a la definición de índice cromático. Por lo tanto  $\chi'_c(G) > \Delta(G)$  si  $G$  es de clase 2, ver [23].

**Teorema 2.3** Si  $G$  es de clase 2, o bien  $\chi'_c(G) = \Delta(G) + 1$  ó  $\Delta(G) + \frac{1}{\alpha'(G)} \leq \chi'_c(G) \leq \Delta(G) + \frac{\alpha'(G)-1}{\alpha'(G)}$ , donde  $\alpha'(G)$  el número de independencia por aristas de  $G$ .

**Demostración 4** En una  $\frac{k}{d}$  coloración circular de las  $q$  aristas de  $G$  hay a lo más  $\alpha'(G)$  intervalos unitarios que pueden intersectarse dos a dos y por tanto  $\frac{k}{d} \geq \frac{q}{\alpha'(G)}$ , lo cual implica  $d \leq \frac{k\alpha'(G)}{q} \leq \alpha'(G)$  por teorema 1. Por lo tanto,  $\Delta(G) + \frac{1}{\alpha'(G)}$  es una cota inferior para  $\chi'_c(G)$  para las gráficas de clase 2 y  $\Delta(G) + 1 - \frac{1}{\alpha'(G)}$  una cota superior si  $\chi'_c(G) < \Delta(G) + 1$ , ver [23].

Por restricción, cualquier  $r$ -coloración circular de  $G$  da una  $r$ -coloración circular para toda subgráfica de  $G$ . Lo cual demuestra lo siguiente:

**Lema 2.2** Sea  $G$  una gráfica y  $H \subseteq G$ . Entonces  $\chi'_c(H) \leq \chi'_c(G)$ .

**Corolario 2.1**  $\chi'_c(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es una gráfica trivial.

**Corolario 2.2** ■ El índice cromático puede ser obtenido, si el índice cromático circular es dado. Es decir;  $\chi'(G) = \lceil \chi'_c(G) \rceil$ .

- Dos gráficas finitas con el mismo índice cromático pueden tener índice cromático circular distinto.

## 2.3. Índice cromático circular de gráficas con pesos $(G, w)$

En esta sección se supone que las aristas  $e_i$  de una gráfica  $G$  tienen asignado un número real no negativo, llamado el peso de la arista  $w(e_i)$ . A la gráfica  $(G, w)$  se le denomina gráfica con pesos.

**Definición 2.9** Una gráfica con pesos en sus aristas  $(G, w)$  es una gráfica  $G$  simple con una función  $w$  de peso, ésta asigna a cada arista de  $G$  un número racional positivo.

**Definición 2.10** Sea  $(G, w)$  una gráfica con pesos en las aristas. Una  $r$ -coloración circular por aristas de  $(G, w)$  es una función  $c : E \rightarrow C$  de las aristas de  $G$  a intervalos sobre  $C^r$ , tal que para toda arista  $e \in (G, w)$  la longitud de  $c(e)$  es igual  $w(e)$  y para cualesquiera par de aristas incidentes  $e_1, e_2$  los intervalos  $c(e_1)$  y  $c(e_2)$  son disjuntos, es decir  $c(e_1) \cap c(e_2) = \emptyset$ , ver la Figura (2.4).

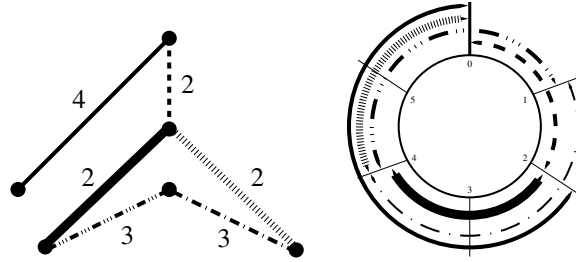


Figura 2.4: a) Gráfica con pesos en sus aristas y b) 6-coloración circular sobre  $C_6$ .

**Definición 2.11** El índice cromático circular  $\chi'_c(G, w)$  de la gráfica  $G$  es el mínimo de los valores de  $r$  para el cual existe una  $r$ -coloración circular de  $(G, w)$ .

Se puede ver como una generalización del  $\chi'_c(G)$  donde  $G$  es formalmente una gráfica sin pesos, en este caso se puede considerar que todas las aristas de  $G$  tienen peso 1.

Otras observaciones directas son, en primer lugar que la coloración propia de las aristas de una gráfica sin pesos es justamente una  $(k, 1)$ -coloración circular. En segundo lugar, dadas las siguientes desigualdades  $\chi'(G) - 1 < \chi'_c(G) \leq \chi'(G)$ , tenemos que  $\chi'_c(G, w) \leq \chi'(G, w)$ . En este trabajo, se exhiben algunas propiedades básicas del índice cromático circular para gráficas con pesos en sus aristas.

## 2.4. Gráfica de líneas $L(G)$

**Definición 2.12** Dada una gráfica  $G$ , se define su gráfica de líneas  $L(G)$  como la gráfica que cumple las siguientes condiciones:

- Cada vértice  $v \in L(G)$  representa una arista  $e \in G$ .
- Dos vértices  $v_1, v_2 \in L(G)$  son adyacentes si y solo si sus aristas correspondientes  $e_1, e_2 \in G$  son incidentes.

Para una gráfica con pesos en sus aristas  $(G, w)$ , la gráfica de líneas es equivalente a la definida anteriormente, de modo que los vértices en  $L(G, w)$  tienen asociado el peso de la arista correspondiente.

**Observación 2.3** El índice cromático circular de una gráfica  $G$  es equivalente al número cromático circular de su gráfica de líneas  $L(G)$ , es decir,  $\chi'_c(G) = \chi_c(L(G))$ . De la misma manera se cumple  $\chi'_c(G, w) = \chi_c(L(G, w))$ .

**Teorema 2.4** Sea  $(G, w)$  una gráfica con pesos en sus aristas. Si  $\chi'_c(G, w) = t$ , entonces existe una  $t$ -coloración circular de  $(G, w)$ .

**Demostración 5** *Hacer la gráfica de líneas  $L(G, w)$  de  $(G, w)$  y ver [7].*

**Teorema 2.5** *Sea  $(G, w)$  una gráfica con pesos en sus aristas. Si  $w(e_i)$  son racionales, entonces  $\chi'_c(G, w)$  es racional. Además si  $w(e_i) = \frac{a_i}{b}$  tienen un denominador común, entonces  $\chi'_c(G, w) = \frac{a}{c}$  para algún  $a \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ .*

**Demostración 6** *Hacer la gráfica de líneas  $L(G, w)$  de  $(G, w)$  y ver [7].*

De aquí que muchas propiedades de coloración circular por vértices pueden ser aplicadas a la coloración circular de las aristas de una gráfica, ver [7].





# Familias de gráficas con índice cromático circular conocido

En las últimas dos décadas el índice cromático circular de algunas gráficas ha sido estudiado por diversos investigadores. Se presenta una tabla que resume ciertas familias de gráficas para las cuales se conoce  $\chi'_c(G)$ ; algunos valores tomados de [24]. En particular, resultan interesantes las familias de gráficas para las cuales  $\chi'_c(G) < \chi'(G)$ , es decir, la familia de gráficas de la clase  $2a$ .

## 3.1. Tabla de familias de gráficas con $\chi'_c(G)$ conocido

Familia de gráficas	$\chi'_c$	clase
Ciclo $C_3$	3	$2b$
Ciclos $C_{2k+1}$	$2 + \frac{1}{k}$	$2a, k > 1.$
Gráficas completas $K_{2k+1}$	$2k + 1$	$2b$
Ruedas Multieje $W_{p+1,p-1}$	$p + 1 + \frac{1}{p-1}$	$2a$
Collares $N_p$	$3 + \frac{2}{p}$	$2a$
Gráfica de Petersen P	$3 + \frac{2}{3}$	$2a$
Snark $J_3$	$\frac{7}{2}$	$2a$
Snark $J_5$	$\frac{17}{5}$	$2a$
Snark $J_{2k+1}$	$\frac{10}{3}$	$2a, k \geq 3$
Snark de Blanuša $B_m^1$	$3 + \frac{2}{3m}$	$2a$
Snark de Goldberg $G_3$	$3 + \frac{1}{3}$	$2a$
Snark de Goldberg $G_{2k+1}$	$3 + \frac{1}{4}$	$2a, k \geq 2$

Cuadro 3.1: Índice cromático circular de algunas gráficas.

## 3.2. Familias de gráficas no cúbicas con $\chi'_c(G)$ conocido

Muchas familias de gráficas han sido suficientemente tratadas en la teoría de gráficas. En [25] se presenta una tabla de familias de gráficas tal que se conoce su número cromático circular. De aquí que si obtenemos las gráficas de líneas de las ruedas rotas pares  $G_{2k}$ , aspas impares  $R_{2k+1}$ , prismas

triangulares  $Q_{3k+1}$ , prismas triangulares  $Q_{3k+2}$  y gráficas  $H_{m,n}$  se podrían obtener otras familias que tienen índice cromático circular menor al índice cromático.

En las siguientes dos subsecciones se tratan familias que aparecen en la Cuadro (3.1), por ser su estudio más reciente.

### 3.2.1. Ruedas Multieje $W_{p,q}$

**Definición 3.1** Entre las familias para las cuales conocemos su índice cromático circular están las ruedas multieje  $W_{p,q}$ , las cuales son obtenidas del ciclo  $C_{p-1}$ , con vértices  $v_0, \dots, v_{p-2}$ , agregando  $q$  vértices  $u_0, \dots, u_{q-1}$  y las aristas entre  $v_i$  y  $u_j$  para  $i = 0, \dots, p-2$ ,  $j = 0, \dots, q-1$ , ver la Figura (3.1).

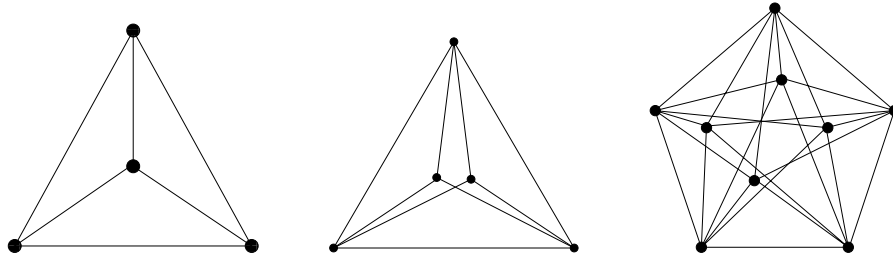


Figura 3.1: Ruedas multieje:  $W_{4,1} = W_4$ ,  $W_{4,2}$  y  $W_{6,4}$ .

**Teorema 3.1** Para cada entero positivo  $p \geq 3$ , se tiene:

$$\chi'_c(W_{p+1,p-1}) = p + 1 + \frac{1}{p-1}.$$

**Demostración 7** La coloración circular óptima esta dada por una  $(p^2, p-1)$ -coloración circular de las aristas de  $W_{p+1,p-1}$ , ver [24].

### 3.2.2. Gráficas $N_p$

**Definición 3.2** La gráfica  $G$  es llamada diamante si  $G$  es isomorfa a la gráfica del a) de la Figura (3.2).

**Definición 3.3** La gráfica  $N_p$  es llamada collar y es obtenida por  $p$  diamantes, los cuales están unidos como se muestra en b) de la Figura (3.2). Los vértices de  $N_p$  son  $V(N_p) = \{a_i, b_i, c_i, d_i : i = 1, \dots, p\} \cup \{v\}$ , y las aristas  $E(N_p) = \{a_i b_i, a_i c_i, b_i c_i, b_i d_i, c_i d_i, d_i a_{i+1} : i = 1, \dots, p\} \cup \{v a_1\}$ , donde  $a_{p+1} = v$ .

**Teorema 3.2** Para cada entero positivo  $p$ , se tiene:

$$\chi'_c(N_p) = 3 + \frac{1}{p}.$$

**Demostración 8** Ver [24].

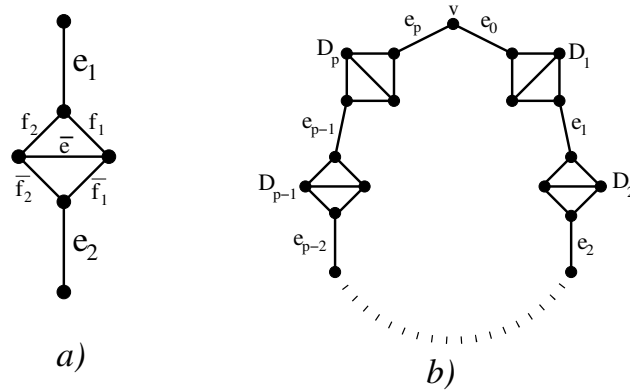


Figura 3.2: Construcción de  $N_p$ : a) Diamante; b) una gráfica  $N_p$ .

### 3.3. Snarks

La siguiente familia se ha estudiado con mucho interés, debido a que es una familia muy extensa, tal que el índice cromático de cada gráfica de esta familia es 4, pero su índice cromático circular es un número racional menor a 4.

**Definición 3.4** *Un snark es una gráfica cúbica, sin puentes, que no tiene una 3-coloración por aristas o coloración de Tait [8].*

Estas gráficas adquirieron relevancia por su relación indirecta con el teorema de los cuatro colores. Se dice que una gráfica  $G$  tiene una *coloración de Tait* si existe una 3-coloración propia de las aristas de  $G$ . Se sabe que un mapa planar es 4-coloreable si y sólo si su gráfica de aristas tiene una coloración de Tait. Luego, el teorema de los cuatro colores es verdadero para un grafo plano  $G$  si sus aristas tienen una coloración de Tait. Así, la presencia de una gráfica cúbica  $G$  que no tenga una coloración de Tait sería un contraejemplo al teorema de los cuatro colores, si  $G$  es la gráfica de aristas correspondiente a un mapa planar.

Se conocen gráficas cúbicas no planares, cuyo índice cromático es 4, se tiene la gráfica de Petersen, que es el snark con menor número de vértices y el primero en conocerse, ver la Figura (3.3). Cerca de 50 años más tarde aparecieron dos nuevos snarks, Blanuša (1946) con 18 vértices y Descartes (1948) con 210 vértices. El cuarto snark en conocerse fué Szekeres (1973) con 50 vértices, el cual es 3 coloreable por vértices y 4 coloreable por aristas, ver la Figura (3.4).

Actualmente son conocidas algunas familias infinitas de snarks. Entre ellas una familia que interesa particularmente para este trabajo, es la familia  $\{J_k\}$ , conocida como la familia de flores (con  $k$  entero positivo e impar).  $J_3$  se obtiene de la gráfica de Petersen, sustituyendo uno de sus vértices  $v$  por un triángulo, tal que cada vértice del triángulo es adyacente a una de las aristas que eran adyacentes al vértice  $v$ .

En 2001, Zhu [30] dió una lista de problemas abiertos, en los cuales aparece el siguiente problema: ¿Existe alguna gráfica cúbica  $G$ , 2-conexa por aristas, tal que su gráfica de líneas  $L(G)$  tenga

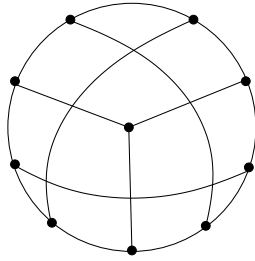


Figura 3.3: Gráfica de Petersen

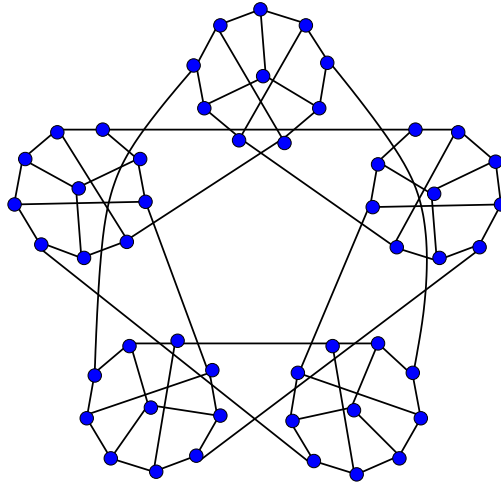


Figura 3.4: Snark de Szekeres

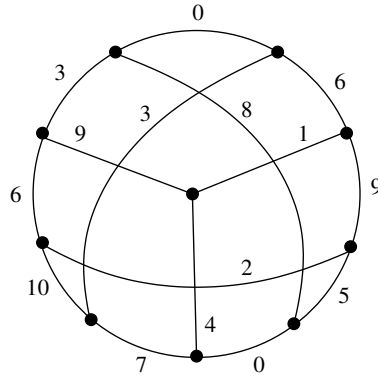
número cromático circular 4? Se debe observar que una coloración de los vértices de la gráfica de líneas de  $G$ , es equivalente a una coloración de las aristas de  $G$ . Es interesante señalar que los snarks pertenecen a la clase  $2a$  de la clasificación de Vizing, de acuerdo a su índice cromático.

### 3.3.1. Gráfica de Petersen

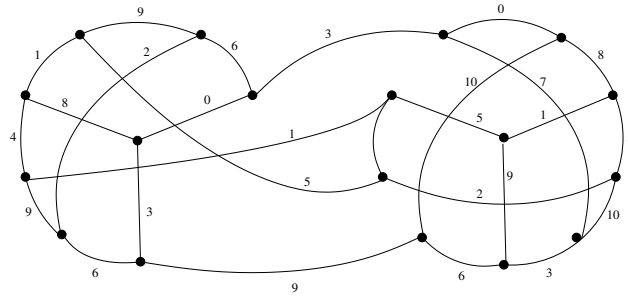
El primer snark descubierto es la gráfica de Petersen, este es el snark con menor número de vértices. En la Figura (3.5) se presenta la forma dada por Kempe en 1886 [29], con una  $\frac{11}{3}$ -coloración circular de sus aristas, que corresponde a su índice cromático circular. Se denota como  $P$  a la gráfica de Petersen. En [1], se prueba que  $\chi'_c(P) = \frac{11}{3}$ .

### 3.3.2. Gráfica de Blanuša

El siguiente snark conocido, fué descubierto por Danilo Blanuša, quien lo dió a conocer en 1946 [29]. La gráfica de Blanuša se forma a partir de dos gráficas de Petersen, con un corte y pegado especiales. Se puede extender una  $\frac{11}{3}$ -coloración circular de las aristas de la gráfica de Petersen a las

Figura 3.5:  $(11,3)$ -coloración de Petersen

aristas de la gráfica de Blanuša, ver la Figura (3.6).

Figura 3.6:  $(11,3)$ -coloración de Blanuša

### 3.3.3. Flores

Esta familia infinita de snarks llamados flores fué descubierta por Grinberg en 1972, aunque su trabajo no se publicó. Independientemente las flores fueron descubiertas por Isaacs en 1974, ver [29].

**Definición 3.5** La gráfica  $J_k$  es llamada un **snark flor** y es definida por el conjunto de  $4k$  vértices  $V(J_k) = \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{u_1^1, u_1^2, u_1^3, \dots, u_k^1, u_k^2, u_k^3\}$ , y el conjunto de aristas consiste de dos ciclos,  $(u_1^1, \dots, u_k^1)$  y  $(u_1^2, \dots, u_k^2, u_1^3, \dots, u_k^3)$  donde cada vértice  $v_i$  es adyacente a  $u_i^1, u_i^2$  y  $u_i^3$  para toda  $i$ , como se muestra en la Figura (3.7).

**Teorema 3.3** Para cada  $k$  impar, se tiene:

$$\chi'_c(J_k) = \begin{cases} \frac{7}{2} & \text{si } k = 3, \\ \frac{17}{5} & \text{si } k = 5, \\ \frac{10}{3} & \text{si } k \geq 7. \end{cases}$$

**Demostración 9** Ver [22] y las siguientes Figuras (3.7) y (3.8).

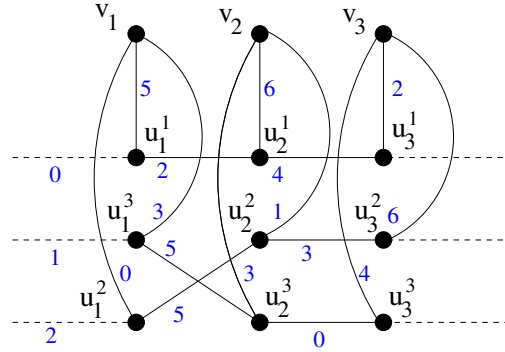


Figura 3.7: Flor snark  $J_3$ .

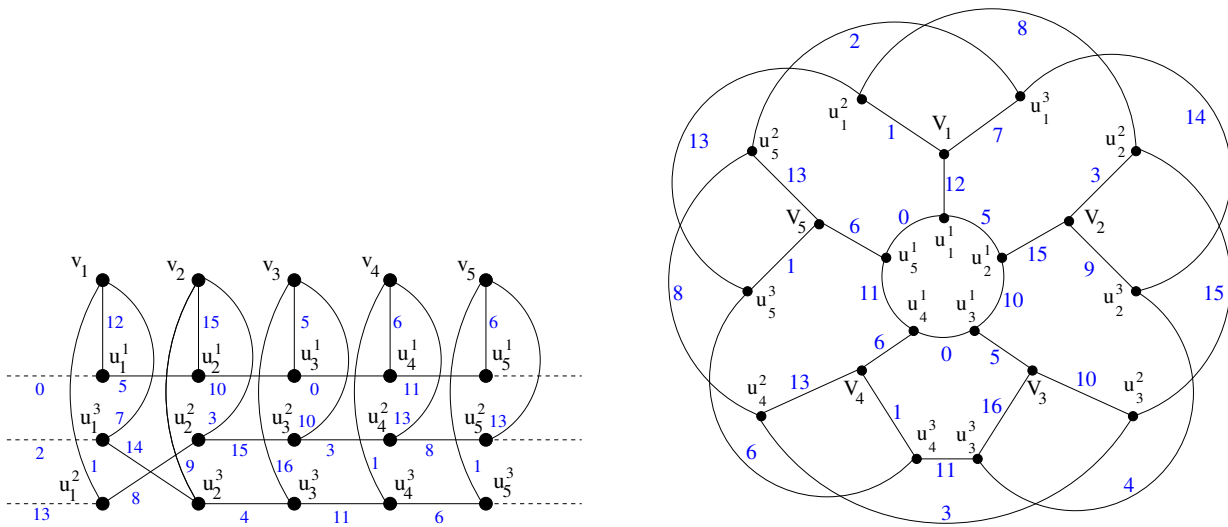


Figura 3.8: Flor snark  $J_5$ .

### 3.4. Familias nuevas de snarks

Dos familia infinitas fueron descubiertas en [20], estas se presentan en esta sección.

#### 3.4.1. Familia de snarks de Blanuša tipo 1

La primer familia de snarks es llamada la familia de Blanuša generalizada de tipo uno y es denotada  $B_m^1$ , fué introducida por Watkins en 1989, la cual se ha estudiado y se ha determinado su índice cromático circular. Esta familia es de las primeras clases en cumplir la propiedad de

tener índice cromático circular muy cercano a 3, ver [20]. Una aportación de este trabajo es una generalización de la familia  $B_m^1$  determinando su índice cromático circular.

Una pregunta natural, en el contexto que se ha expuesto es la siguiente: ¿Existen gráficas cúbicas finitas que tengan índice cromático circular en el intervalo  $(\frac{11}{3}, 4)$ , cuántas existen?. En [1] se ha demostrado que toda gráfica cúbica sin puentes tiene índice cromático circular a lo más  $\frac{11}{3}$ . La primer y única gráfica cúbica que alcanza la cota superior es la gráfica de Petersen.

La construcción de la familia  $B_m^1$  esta dada por el pegado de manera cíclica de bloques, cada bloque es llamado bloque fundamental, ver la Figura (3.9). En [20] se demuestra que solo existen tres 3 coloraciones de las aristas del bloque fundamental  $B$ , cumpliendo la propiedad que el color asignado a las aristas  $a$  y  $c$  es el mismo, equivalentemente a las aristas  $b$  y  $d$ .

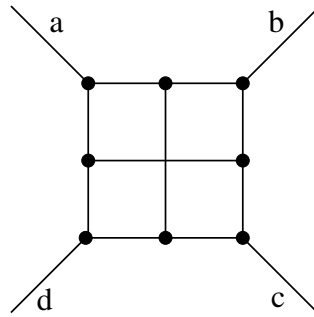


Figura 3.9: Bloque Fundamental

Antes de iniciar con el pegado de los bloques, se empieza pegando una arista  $uv$  a un bloque fundamental y enseguida se pegan bloques de manera circular, ver la Figura (3.10).

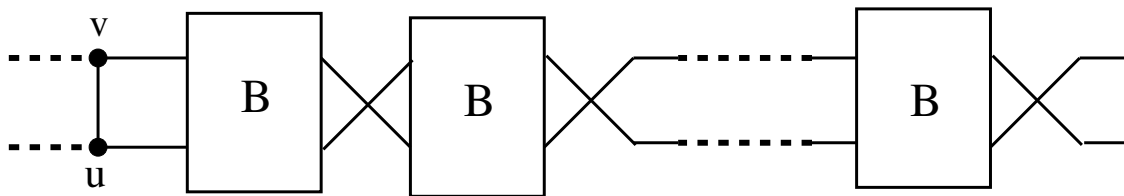


Figura 3.10: Una generalización de Snark Blanuša tipo 1

Si  $m$  es el número de copias del bloque  $B$ , la gráfica que se obtiene es  $B_m^1$ . Todas las gráficas  $B_m^1$  forman la familia de snarks Blanuša tipo 1. Surge una primer pregunta ¿ $B_m^1$  es un snark?, en [20] se estudia esta generalización y se demuestra  $B_m^1$  es una familia de snarks y que  $\chi'_c(B_m^1) \leq \frac{10}{3}$  para toda  $m \geq 2$ . Cuando  $m = 1$ , la gráfica es isomorfa a la gráfica de Petersen. El teorema principal que se demuestra en el artículo es el siguiente:

**Teorema 3.4** *El índice cromático circular de  $B_m^1$  es  $3 + \frac{2}{3m}$ .*

**Demostración 10** Es suficiente encontrar una  $(9m + 2, 3m)$ -coloración de las aristas de  $B_m^1$ . Ver [20] y la Figura (3.11).

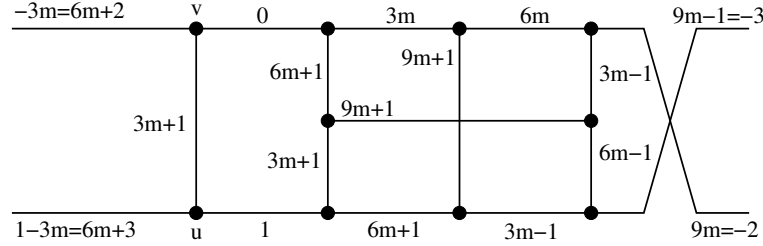


Figura 3.11: Una  $(9m + 2, 3m)$ -coloración de las aristas de  $B_m^1$

### 3.4.2. Familia de snarks de Goldberg

La siguiente familia para la cual se estudia su índice cromático circular es la familia de snarks de Goldberg definida en [22], así como también la familia de snarks de Goldberg cruzados.

**Definición 3.6** Se define un snark de Goldberg  $G_k$  de la siguiente manera: Para todo  $k \geq 3$  impar,  $V(G_k) = \{v_j^t \mid 1 \leq t \leq k, 1 \leq j \leq 8\}$  con  $(t \bmod(k))$ . Ver Figura (3.12).

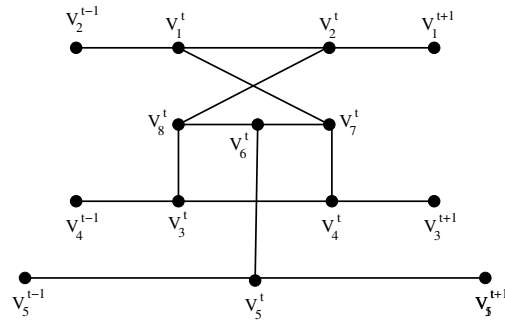


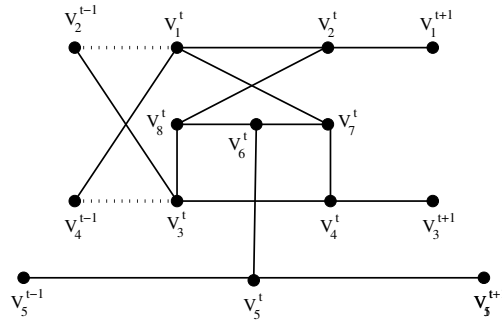
Figura 3.12: Snark de Goldberg  $G_k$

**Definición 3.7** Para cada  $k$  impar, definimos  $TG_k$  el snark de Goldberg cruzado de  $G_k$  reemplazando las aristas  $v_2^{t-1}v_1^t$  y  $v_4^{t-1}v_3^t$  con las aristas  $v_2^{t-1}v_3^t$  y  $v_4^{t-1}v_1^t$ . Ver Figura (3.13).

Se puede observar que al aplicar más cruces no se obtienen nuevas gráficas. Es decir, si el número de cruces es par se obtiene una gráfica isomorfa a  $G_k$ , si es impar la gráfica es isomorfa a  $TG_k$ . Se demuestra en [22] que  $\chi'_c(G_k) \leq 3 + \frac{1}{2}$  para cada  $k \geq 3$  impar, así como también el siguiente teorema.

**Teorema 3.5** Para cada  $k \geq 3$  impar, se tiene:

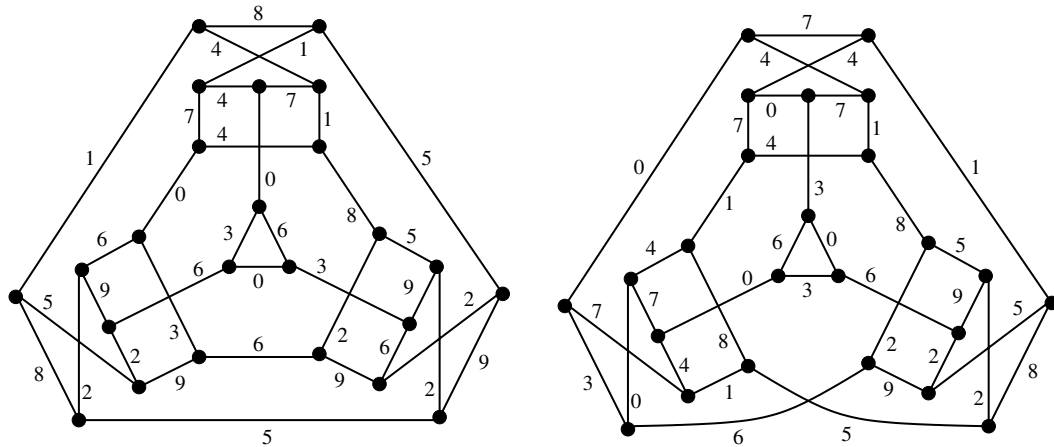



 Figura 3.13: Snark de Goldberg cruzado  $TG_k$ 

$$\chi'_c(G_k) = \chi'_c(TG_k) = \begin{cases} 3 + \frac{1}{3} & \text{si } k = 3 \\ 3 + \frac{1}{4} & \text{si } k \geq 5. \end{cases}$$

**Demostración 11** Ver [22].

A continuación, en la Figura (3.14) se exhiben  $G_3$  y  $TG_3$  con una  $(10, 3)$ -coloración óptima de sus aristas.


 Figura 3.14: Una  $(10, 3)$ -coloración circular de las aristas de  $G_3$  y  $TG_3$ .

Así mismo, se observa una propiedad en  $G_7$ , la cual implica verdadero el Teorema 3.5 para toda  $k \geq 5$ . Se tiene que  $G_5$  y  $G_7$  tienen la misma coloración circular dado que los dos últimos bloques repiten la coloración del bloque inicial. Esto ocurre para todos los  $G_k$  y  $TG_k$ , se repiten a partir de  $k \geq 5$ , impar.

### 3.4.3. Pegado de gráficas por trayectorias

Las operaciones con gráficas producen nuevas gráficas apartir de las iniciales. Algunas de ellas son unión, intersección, suma, producto, suma de Hajós. Como una aportación de este trabajo, se

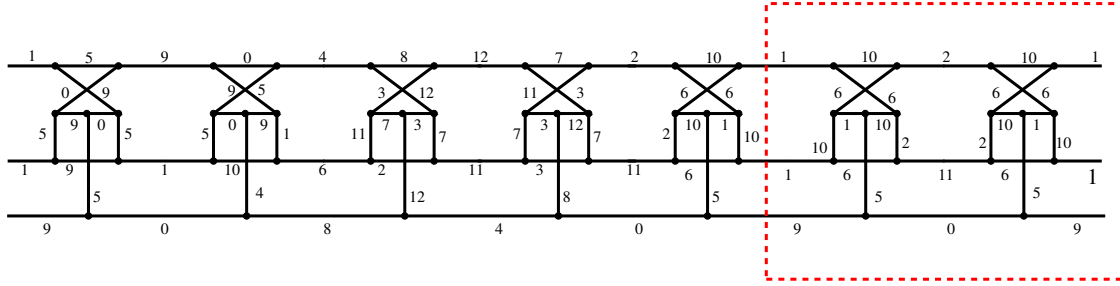


Figura 3.15:  $JG_k$  con  $k \geq 5$ , tiene una  $(13, 4)$  coloración circular.

define la operación pegado por trayectorias de tamaño finito.

**Definición 3.8** Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos ciclos impares de longitud  $m$  y  $n$  respectivamente, sea  $k < m, n$ . Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , se considera una trayectoria  $T_i$  de longitud  $k$  en el ciclo  $C_i$ , se pegan los ciclos de manera que coincidan las trayectorias  $T_i$  como se muestra en la Figura (3.17). De esta manera se obtiene una nueva gráfica conexa  $G$ . Se dice que  $G$  es el pegado de  $C_1$  y  $C_2$ , por una trayectoria de longitud  $k$  y se denota como  $C_1 \circ_k C_2$ .

Para  $G_1 \circ_k G_2$  surge la pregunta ¿Es posible extender la coloración circular de cada una de las gráficas iniciales a la gráfica nueva?. Primero se analiza el caso en que  $G_i$  es  $C_5$ , para  $i = 1, 2$ . Si  $k = 0$ , la respuesta es negativa pues su índice cromático circular es mayor a 3 dado que el grado máximo es 4, ver Lema 2.1. Si  $k = 1$ , agregando las siguientes aristas punteadas en la Figura (3.16) se obtiene una gráfica cúbica. Se puede observar que esta nueva gráfica es isomorfa al bloque fundamental de la familia de snark Blanuša tipo 1. Por tanto, este bloque fundamental se puede construir mediante el pegado de dos ciclos  $C_5$  por una trayectoria de longitud 1.

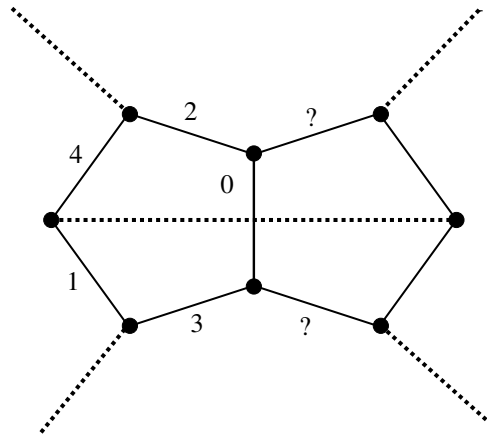


Figura 3.16: Gráfica cúbica isomorfa al bloque fundamental de snark Blanuša tipo 1.

La idea subyacente en estas construcciones es hallar bloques que al unirse de una cierta manera produzcan snarks, como sucede con las gráficas de Goldberg y Blanuša tipo 1, esto se puede lograr

pegando dos gráficas mediante trayectorias de longitud finita y agregando aristas para tener bloques con sus vértices cúbicos.

Con el fin de obtener nuevos bloques, se propone  $C_7 \circ_k C_7$ . Utilizando el mismo método de pegado por trayectorias se encuentran las siguientes gráficas, ver Figura (3.17). Se considera  $k = 1$ , si se agregan las aristas punteadas que aparecen en la Figura (3.18), se tiene un bloque nuevo  $B$ .

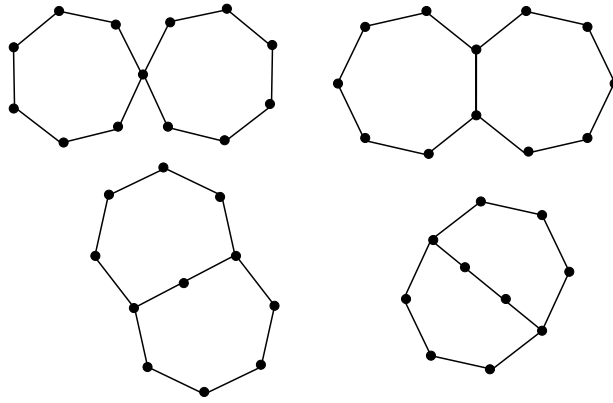


Figura 3.17: Dos ciclos  $C_7$  pegados por una trayectoria.

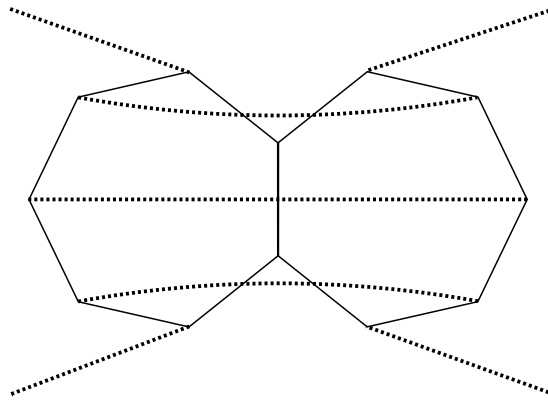
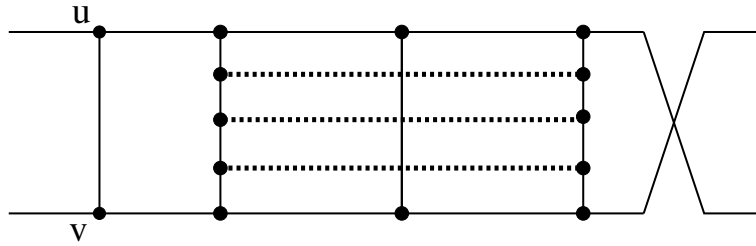
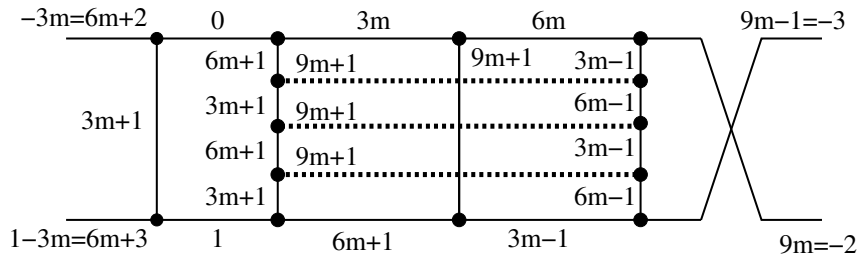


Figura 3.18:  $C_7 \circ_1 C_7$  pegados por una trayectoria de tamaño uno.

Analogamente a la construcción de la familia del snark Blanuša tipo 1, se toma la Figura (3.18) como un bloque fundamental  $B$ , si se considera la arista  $uv$  y la gráfica  $C_7 \circ_1 C_7$  se obtiene una gráfica similar a  $B_1^1$ , ver Figura (3.19). Ahora se realiza el pegado cíclico de bloques como se describe en [20], lo que da lugar a una familia semejante a la familia de snarks Blanuša tipo 1. La demostración de que esta familia está formada por snarks es equivalente a la expuesta en [20], se demuestra que cada bloque fundamental tiene 3 coloraciones con tres colores de sus aristas, salvo permutaciones de colores y al unir la arista  $uv$  al bloque se tiene una gráfica es cúbica y sin puentes. Así, lo único que falta probar es que no existe una 3-coloración de sus aristas de  $C_7 \circ_1 C_7$  unión la arista  $\{uv\}$ .

Figura 3.19: Arista  $uv$  con  $C_7 \circ_1 C_7$ .

Para demostrar que no existe una 3-coloración, primero se debe encontrar una cota superior. Es decir, se puede dar una  $(9m + 2, 3m)$ -coloración de las aristas de la gráfica  $C_7 \circ_1 C_7$ , ver la Figura (3.20). Por lo tanto tenemos que  $\chi'_c(C_7 \circ_1 C_7) \leq 3 + \frac{2}{3m}$ . Probar la cota inferior es equivalente a la demostración en [20]. Por tanto el  $\chi'_c(C_7 \circ_1 C_7) = 3 + \frac{2}{3m}$ .

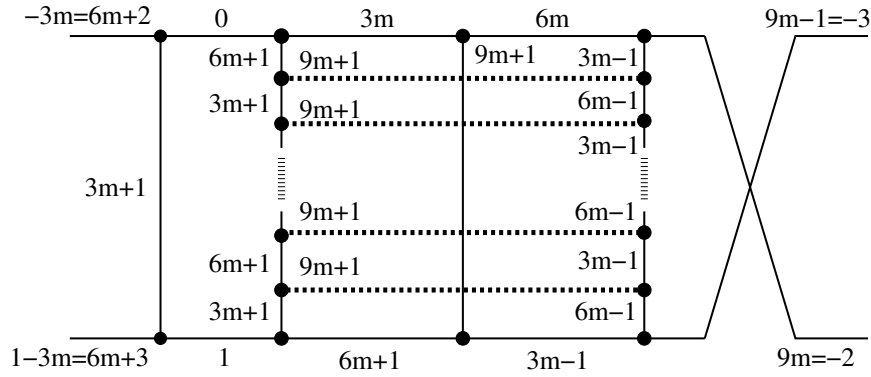
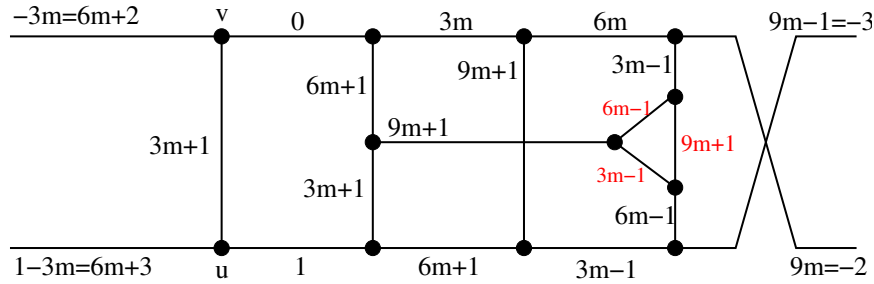
Figura 3.20: Índice Cromático Circular  $C_7 \circ_1 C_7$ .

La familia snarks Blanuša tipo 1 se extiende a los snarks que son obtenidos pegando dos ciclos impares  $C_{2s+1}$  por una trayectoria de longitud uno unión la arista  $uv$ , como se describe anteriormente. Denótese por  $B_t^{C_{2s+1}}$  la familia de snarks descrita anteriormente con  $t$  bloques  $C_{2s+1} \circ_1 C_{2s+1}$ , donde  $t$  es un entero impar y  $s \geq 2$  entero.

**Observación 3.1** Para una  $t$  dada, el snark  $B_t^{C_{2s+1}}$  tiene como menor al snark Blanuša tipo 1 con  $t$  bloques. Ambos snarks tiene como menor a la gráfica de Petersen.

Dado que para cada  $s \geq 2$  siempre se aumentan un número par de aristas en la gráfica  $C_5 \circ_1 C_5$  y dadas las coloraciones de las trayectorias superior e inferior no cambian, entonces podemos extender la  $(9m+2, 3m)$ -coloración a la gráfica  $B_t^{C_{2s+1}}$ , ver la Figura (3.21). Por lo tanto  $\chi'_c(B_t^{C_{2s+1}}) = 3 + \frac{2}{3m}$ .

Ahora, es válido preguntarse si se puede obtener un snark con el pegado de una trayectoria de tamaño uno, de dos ciclos de diferente longitud. Se consideran en primer lugar los ciclos  $C_5$  y  $C_7$ , los cuales se pegan por una trayectoria de tamaño uno, ver la Figura (3.22), se observa que existen dos vértices de grado dos, para construir un snark estos deben tener grado 3. Una manera de que estos vértices tengan grado 3 es agregar una arista entre ellos, de hecho es la única manera de hacer la gráfica cúbica, sin perder la estructura. Dado que esta gráfica  $C_5 \circ_1 C_7$  es isomorfa a la gráfica

Figura 3.21: Índice Cromático Circular  $C_{2k+1} \circ_1 C_{2k+1}$ .Figura 3.22:  $C_5 \circ_1 C_7$  pegado por una trayectoria tamaño uno.

$C_5 \circ_1 C_5$  con uno de sus vértices expandido mediante la sustitución de un vértice por un triángulo, se puede extender la  $(9m+2, 3m)$ -coloración de sus aristas.

Inductivamente se puede decir que si se pegan un  $C_5$  con un  $C_{2s+1}$  ( $s \geq 2$ ) por una trayectoria de tamaño uno, se obtienen snarks para los cuales la  $(9m+2, 3m)$ -coloración de sus aristas se preserva, ver la Figura (3.23).

En [29], existe una amplia discusión sobre la noción de trivialidad de snarks. En ese artículo a una gráfica no se considera snark si es obtenida mediante una modificación trivial de algún otro snark. En particular, si un snark contiene un triángulo, éste puede ser obtenido por un snark más pequeño, reemplazando un vértice por un triángulo o visceversa. Los snarks que se forman pegando dos circuitos  $C_m$  y  $C_n$  por una trayectoria de longitud uno, donde  $m, n \geq 5$  y  $m \neq n$ , entran en el caso que se menciona en este párrafo.

Aquí extendemos la familia snarks Blanuša tipo 1 a partir del pegado cíclico de bloques, unión la arista  $uv$ . Cada bloque está formado por dos ciclos impares del mismo tamaño, pegados por una trayectoria de tamaño uno.

Se puede observar que un bloque de Goldberg es isomorfo al pegado por medio de una trayectoria de tamaño dos, de dos ciclos  $C_5$ , siguiendo la misma estructura de los snark de Goldberg agregamos las aristas correspondientes, ver la Figura (3.24). Otra posibilidad de pegado de los ciclos  $C_5$  puede

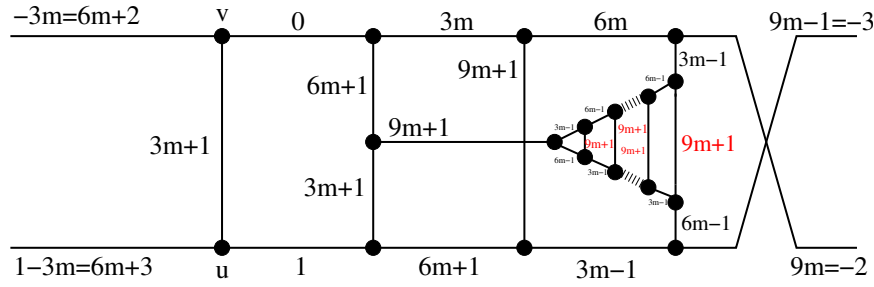


Figura 3.23:  $C_5 \circ_1 C_{2k+1}$  pegado por una trayectoria tamaño uno.

verse en la Figura (3.13), dando lugar a los snarks de Goldberg cruzados. Dado que la coloración no cambia según el Teorema 3.5 de esta tesis, es equivalente trabajar en ambos tipos de estructura.

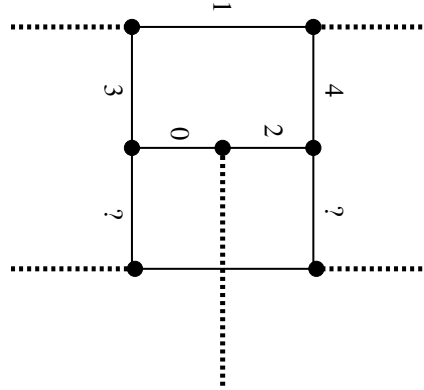
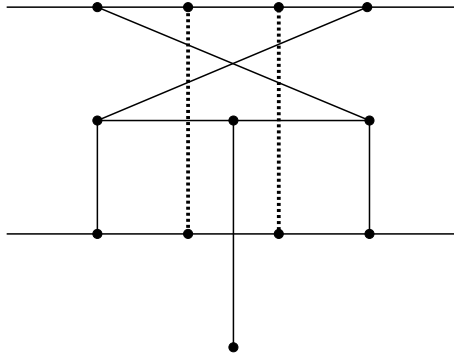


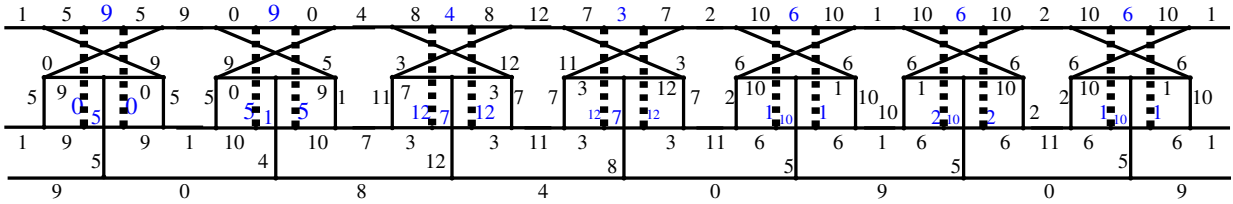
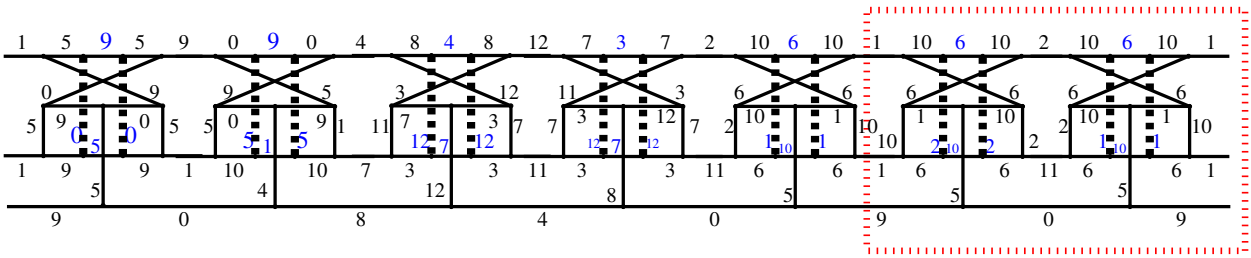
Figura 3.24:  $C_5 \circ_2 C_5$ .

La gráfica de Figura (3.24) puede considerarse un bloque fundamental  $B_G$  para los snarks de Goldberg. Se realiza el pegado cíclico de copias de ella para obtener  $G_{2k+1}$ , con  $k \geq 1$ . En [22] se prueba que  $\chi'_c(G_{2k+1}) = \chi'_c(TG_{2k+1}) \leq 3 + \frac{1}{3}$ , se muestra la coloración por aristas para las gráficas con  $k \geq 2$ . En el mismo artículo se da una  $(10, 3)$ -coloración circular de las aristas de  $G_3$  y  $TG_3$ , la cual se obtuvo mediante una búsqueda computacional exhaustiva. Las gráficas  $G_3$  y  $TG_3$  contienen un ciclo  $C_3$  en cada bloque. Si se contraen los triángulos  $C_3$  a un vértice, se obtiene el snark de Loupekine. Estos snarks tienen una  $(10, 3)$ -coloración circular de sus aristas, debido a que contraer triángulos no cambia la coloración de la gráfica.

En este trabajo también se extiende la idea del párrafo anterior. Si se toman dos ciclos  $C_7$  y se pegan por una trayectoria de tamaño 2, se obtiene la siguiente gráfica, ver Figura (3.25) que se usará como un bloque fundamental  $B_J$ . Considérese la familia de snarks que se denota como  $JG_m^k$ , donde  $m$  es el número de bloques y  $k$  corresponde al tamaño de los ciclos  $C_k$ , con los que se obtiene el bloque fundamental  $B_J$ . Si  $k = 5$  y  $m$  es un número impar, se tienen los snarks de Goldberg. Si  $k = m = 7$ , se puede ver que  $JG_7^7$  tiene una  $(13, 4)$ -coloración circular de sus aristas, ver Figura (3.26),  $JG_5^7$  también admite la misma  $(13, 4)$ -coloración circular de sus aristas, mostrada

Figura 3.25:  $C_7 \circ_2 C_7$ .

en la Figura (3.27), sin los bloques encerrados entre líneas punteadas. Así que  $\chi'_c(JG_m^7) \leq \frac{13}{4}$  para  $m \geq 5$ ,  $m$  impar. Por lo tanto para  $m \geq 7$ , los dos bloques encerrados en líneas punteadas en la Figura (3.27) se repiten  $\frac{(m-5)}{2}$  veces, lo cual nos da una  $(13, 4)$ -coloración circular de sus aristas.

Figura 3.26:  $JG_7^7$  con una  $(13, 4)$ -coloración circular.Figura 3.27:  $JG_m^7$  con una  $(13, 4)$ -coloración circular ( $m \geq 5$ , impar).

Dado que en [22] se demuestra la cota inferior, es decir que para toda  $m \geq 3$  impar, el índice cromático circular de  $G_m$  es mayor e igual  $3 + \frac{1}{4}$ , podemos concluir que  $\chi'_c(JG_m^7) = 3 + \frac{1}{4}$  para toda  $m \geq 5$  impar, además son snarks obtenidos a partir de  $G_m$ . Ahora podemos ver que si pegamos dos ciclos  $C_9$  por una trayectoria de tamaño dos obtenemos la gráfica llamada  $JG_m^9$ , la cual sigue extendiendo la  $(13, 4)$ -coloración circular de sus aristas, ver Figura (3.28). Por tanto estas gráficas se pueden generalizar para pegados por trayectoria de longitud dos con dos ciclos  $C_k$  para  $k$  impar, llamadas  $JG_m^k$  donde  $m$  es el número de bloques y  $k$  el tamaño de los ciclos. Aunque según la

literatura cualquier gráfica que tenga un cuadrilátero no se considera snark debido a que proviene de un snark más pequeño, nosotros exhibimos que los snarks de Goldberg pertenecen a una clase muy amplia.

**Observación 3.2** *Considérese el pegado de dos ciclos  $C_k$  por una trayectoria de tamaño tres, si  $k = 7$ , el bloque fundamental sería  $C_7 \circ_3 C_7$ . Con la estructura de los snark de Goldberg se tiene una gráfica cúbica. En la Figura (3.29) se puede ver que esta gráfica tiene una 3-coloración circular de sus aristas, así que no es un snark.*

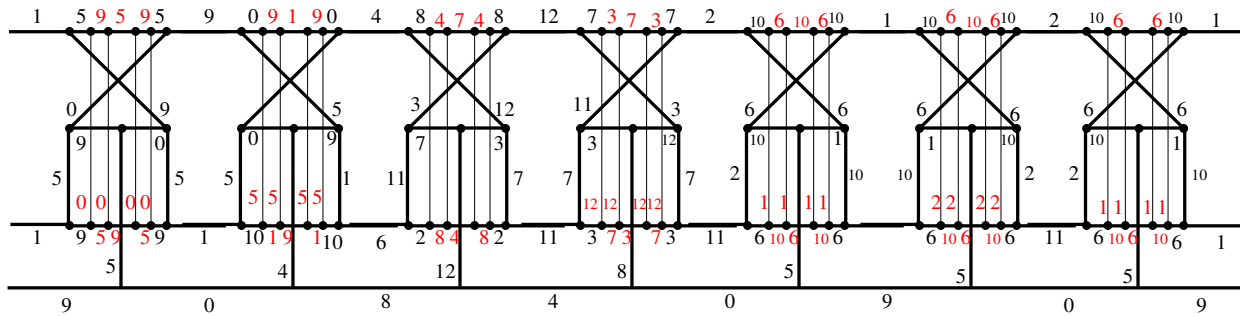


Figura 3.28:  $(13, 4)$ -coloración circular de  $JG_7^9$ .

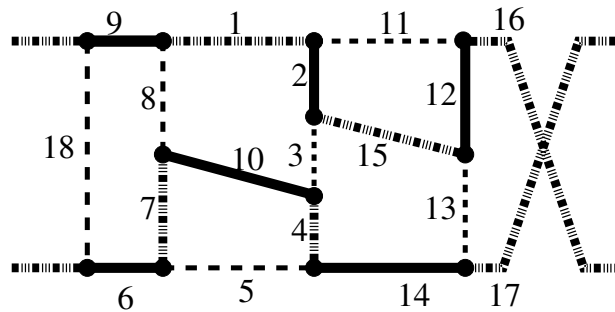
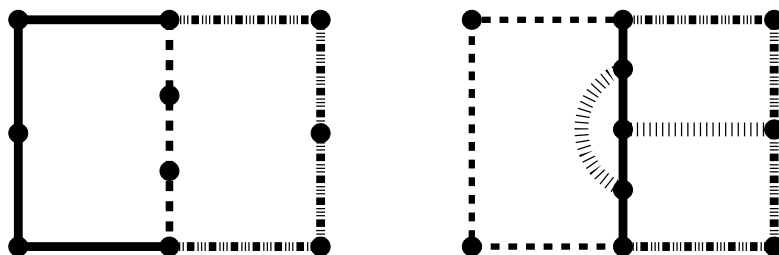
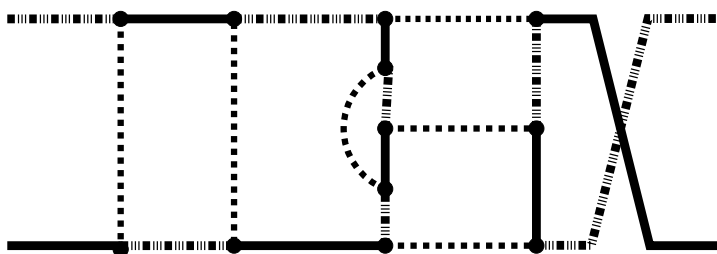


Figura 3.29: 3-coloración circular de dos  $C_7$  con trayectoria tamaño 3.

Ahora bien, si definimos el siguiente pegado podemos dar un isomorfismo de manera de ir de una gráfica a la otra, debido a que la segunda gráfica parece ser más prometedora que la primera, ver la Figura (3.30). Agregando la arista  $uv$  y la estructura de la familia de Snark Blanuša tipo 1 obtenemos una gráfica que necesitamos demostrar no tenga una 3-coloración circular de sus aristas.

Exhibimos una 3-coloración circular de sus aristas de esta gráfica, por lo cual esto nos dice que no es un snark, ver Figura (3.31).



Figura 3.30: Dos  $C_7$  con trayectoria tamaño 3.Figura 3.31: Una 3-coloración circular de  $C_7 \circ_3 C_7$ .



# Aplicación de la coloración circular en sistemas de producción cíclica

---

Existe un gran número de problemas de optimización que hasta el momento no han sido resueltos con métodos exactos, es decir, no existe una serie finita de pasos que computacionalmente resuelvan el problema, dado que el número de variables de decisión y el número de soluciones factibles crecen rápidamente, se tiene que el esfuerzo computacional crece de manera exponencial.

La teoría de asignación engloba una gran variedad de problemas. Estos se pueden clasificar en un amplio esquema de tres tipos: Flow shop, Job shop y Open Shop. Supóngase que se tiene un conjunto de trabajos que deben ser procesados en un número de máquinas. Cada trabajo consiste de un número finito de tareas, cada una de ellas debe ser procesada en una máquina durante un tiempo finito. La clasificación esta dada dependiendo del orden de las restricciones de las tareas en los trabajos.

En los problemas Flow shop cada trabajo tiene a lo más una tarea en cada máquina y todas las tareas de todos los trabajos son procesadas en el mismo orden, es decir, cada trabajo pasa a las máquinas en el mismo orden. En los problemas Job shop las tareas de cada trabajo deben ser procesadas en un orden dado, el cual esta especificado en el trabajo, aunque diferentes trabajos tengan diferentes tareas. En un problema Open shop no hay restricción en el orden de las tareas, ver [21].

El problema de producción cíclica se modela de manera natural usando una *gráfica bipartita pesada*  $(G, w)$ . Se tiene una partición de los vértices en dos conjuntos. El primero representa los procesadores, mientras que el otro conjunto de la partición consiste de los vértices que representan los trabajos. Entonces una arista que une los vértices  $J_i$  y  $P_j$  corresponde a la tarea  $T_{ij}$  y se le asigna su peso  $t_{ij}$ . Esta gráfica es llamada gráfica de asignación. Una coloración circular de las aristas de la gráfica de asignación corresponde a un ciclo de producción y viceversa, donde a la arista  $T_{ij}$  se le asigna un intervalo de producción.

La siguiente aplicación ilustra un ejemplo de este tipo de problemas [12]. Los profesores son las máquinas y los estudiantes a los trabajos.  $t_{ij}$  es el tiempo que se reúne el estudiante  $J_i$  con el profesor  $P_j$ . Una **calendarización** consiste en asignar los estudiantes a los profesores de manera que:

- Un estudiante no puede reunirse con dos profesores al mismo tiempo.

- Ningún profesor se puede reunir con más de un estudiante al mismo tiempo.
- El estudiante  $J_i$  se reúne con el profesor  $P_j$  en  $t_{ij}$  unidades de tiempo, sin interrupciones.

Este tipo de problemas cuentan con parámetros  $n$  y  $m$  que corresponden al número de estudiantes y de profesores respectivamente. La solución óptima es una calendarización de tiempo mínimo respecto de todas las asignaciones posibles.

El objetivo de este capítulo es aplicar el índice cromático circular a una clase especial de problemas de asignación, en particular a problemas del tipo cyclic open shop conocidos o también como *sistema de producción cíclica*, mediante técnicas exactas y la implementación de una heurística que determine su índice cromático circular.

## 4.1. Terminología básica y presentación del problema

Se define un problema de producción cíclica PPC. Supóngase  $m$  procesadores  $P_1, P_2, \dots, P_m$  y  $n$  trabajos  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . Cada trabajo  $J_i$  consiste de  $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{im}$  tareas, donde cada  $T_{ij}$  es procesada sin interrupción en  $t_{ij}$  unidades de tiempo en el procesador  $P_j$ . Se asume que los  $t_{ij}$  son enteros no negativos. Una calendarización de un problema de producción cíclica es una asignación de períodos de tiempos a las tareas tal que ningún procesador ejecuta dos tareas al mismo tiempo y tareas del mismo trabajo no se procesan simultáneamente. Nuestro objetivo es minimizar la longitud de la calendarización, considerando que cada ciclo de producción inicia enseguida de otro. Entonces se puede permitir que una tarea inicie cerca del fin del ciclo de producción y se complete en el inicio del siguiente ciclo de producción.

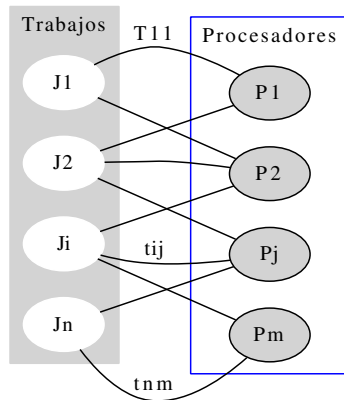


Figura 4.1: Gráfica bipartita con pesos  $(G, w)$ .

## 4.2. Complejidad computacional

### 4.2.1. Acerca del cálculo de $\chi_c$ y $\chi'_c$

El cálculo del índice cromático circular no es un problema trivial. Para calcular el  $\chi_c(G)$  y  $\chi'_c(G)$ , dado que  $G$  tiene una  $(k, d)$  coloración y  $k \geq 2d$ , el problema de decisión sobre si  $\chi_c \leq k/d$  para una gráfica  $G$  es NP-completo [5]. Dado que, obtener una  $k$ -coloración propia de una gráfica  $G$  es un problema NP-completo para cada  $k \geq 3$ , entonces por la igualdad  $\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$  se tiene que el problema de coloración circular es al menos duro [3].

Es NP-duro decidir si para una gráfica  $G$  la igualdad  $\chi_c(G) = \chi(G)$  se cumple, ver [14]. Es NP-duro encontrar el  $\chi'_c$  de una gráfica simple [26].

### 4.2.2. Acerca del problema de producción cíclica

En [11] y [13] se demuestra que el problema de asignación es polinomial para dos máquinas, allí también se demuestra que el problema es NP-duro para tres o más máquinas. Un esbozo de la demostración es la siguiente: supóngase que a cada trabajo  $J_i$  se le asigna  $(A_i, B_i)$ , donde  $A_i$  es el tiempo de procesamiento del trabajo  $J_i$  en  $M_1$  y  $B_i$  es el tiempo de procesamiento del trabajo  $J_i$  en  $M_2$ . Se dividen los pares  $(A_i, B_i)$  en dos conjuntos, digamos  $A = \{(A_i, B_i) \mid A_i \geq B_i\}$  y  $B = \{(A_j, B_j) \mid A_j < B_j\}$ . Sean  $A_i(j)$  el tiempo de procesamiento en  $M_j$  de  $A_i$  y  $B_i(j)$  el tiempo de procesamiento en  $M_j$  de  $B_i$ . Por definición de los conjuntos  $A$  y  $B$  tenemos  $A_i(1) \geq A_i(2)$  y  $B_j(1) < B_j(2)$ , de aquí que sin pérdida de generalidad  $A_R(1) > A_i(1)$  para toda  $i = 1, \dots, R-1$  y  $B_L(2) > B_j(2)$  para toda  $j = 1, \dots, L-1$ . Se agrupan las tareas  $A_R > A_{R-1} > \dots > A_1$  de menor a mayor en  $M_1$ , en  $M_2$  llevan el mismo orden, satisfaciendo  $A_R(2)$  inicia cuando  $A_R(1)$  finaliza, es decir las tareas de  $A$  se agrupan de menor a mayor y son agrupadas a la derecha satisfaciendo que cuando finaliza en  $M_1$  tal vez inicie en  $M_2$ . De manera análoga con las tareas de  $B$  agrupadas  $B_L > B_{L-1} > \dots > B_1$  en  $M_1$  y  $M_2$  satisfaciendo que  $B_L(2)$  inicia cuando  $B_L(1)$  finaliza. Se concatena  $B$  con  $A$  y los trabajos en los extremos se mueven al inicio o al final según el tiempo de procesamiento. Con esto se garantiza encontrar el óptimo en tiempo polinomial  $2N$ , donde  $N$  es el número de trabajos. Si agregamos un máquina más, se hacen un ordenamiento de las primeras dos máquinas de menor tiempo y enseguida un siguiente ordenamiento con la tercer máquina, es decir el algoritmo necesita  $(2N)^2$  pasos, por tanto el problema para tres máquinas es exponencial. En general si tenemos  $M$  máquinas con este algoritmo necesitamos  $(2N)^{M-1}$  pasos.

## 4.3. Modelo de programación lineal

Sea  $G$  una gráfica sin pesos en sus aristas, se considera su gráfica de líneas  $L(G)$ . Tomando un ordenamiento arbitrario de los vértices de  $L(G)$  se encuentra una asignación  $c$  de los vértices sobre  $C^r$  para algún  $r \in \mathbb{R}^+$ , que cumple la Definición 2.5. Se desea obtener la circunferencia de menor tamaño, es decir, si cada ordenamiento es solución factible, entonces se desea encontrar la asignación óptima de todas las asignaciones que existen.

El modelo de programación lineal siguiendo a [3], es expresado de la siguiente manera: Minimizar la longitud de la circunferencia  $C^r$ . Sujeta a las restricciones de ordenamiento y adyacencia de vértices de  $G$ .

- Cada vértice  $v_i$  esta representado por la variable  $x_i$ ,
- La variable  $x_i$  es el punto de inicio del intervalo asignado a  $v_i$  sobre la circunferencia,
- La primera variable se considera como el punto de inicio de la circunferencia, pero también se puede ver como el punto final de la circunferencia, se tiene el perímetro si se recorre del punto de inicio al punto final.

Sea  $n$  el orden de la gráfica  $G$ , se tienen  $n$  restricciones correspondientes al ordenamiento, que son llamadas restricciones por ordenamiento. Es decir, si el vértice  $v_i$  esta primero que  $v_j$ , entonces  $v_j$  no puede ser asignado antes de  $v_i$ , matemáticamente  $x_j - x_i \geq 0$ . Excepto la primera variable del ordenamiento, debido que se considera al final.

Un segundo grupo de restricciones son las restricciones por adyacencia, si  $v_i$  es adyacente a  $v_j$ , entonces sus arcos asociados sobre la circunferencia deben ser disjuntos, es decir,  $1 \leq |x_i - x_j| \leq x_m - 1$ , donde  $x_m$  es la primera variable del ordenamiento.

Resumiendo, el modelo tiene  $n$  variables y  $2|E(G)| + |V(G)| - 1$  restricciones. Para resolver el problema de programación lineal se usó el software GLPK (GNU Linear Programming Kit), el cual se utiliza, entre otros problemas, para resolver problemas de programación lineal a gran escala y programación entera mezclada (MIP).

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & x_m \\
 \text{sujeto a:} & \\
 & x_j - x_i \geq 0 \quad i = j, \text{ desde la posición } i = 2 \dots |V(G)| \\
 & x_k - x_l \geq 1 \quad \text{para toda } (v_k, v_l) \in E(G) \\
 & x_m + x_l - x_k \geq 1 \quad \text{para toda } (v_k, v_l) \in E(G) \\
 & 0 \leq x_i \leq \infty \quad \text{para toda } i = 1, \dots, |E(G)|.
 \end{array}$$

#### 4.3.1. Métodos conocidos

Existen diferentes formas de encontrar una coloración circular para una gráfica. Un método mencionado recientemente, es una combinación de la resolución de un problema de programación lineal con una búsqueda tabú, ver [3]. Dado que el modelo matemático que se sigue es un problema de programación lineal, en este trabajo se cambia la heurística por otra conocida en la literatura como búsqueda en vecindades variables (BVV).

#### 4.3.2. Variables del modelo matemático

Para resolver el problema se utiliza una gráfica con pesos en sus aristas, las variables definidas para este problema son las siguientes:

- $J$  : es el conjunto de trabajos,

- $P :$  es el conjunto de procesadores,
- $T :$  es el conjunto de tareas.
- $J_i \in J :$  es el trabajo  $i$ , para  $i = 1, \dots, n$ ,
- $P_j \in P :$  es el procesador  $j$ , para  $j = 1, \dots, m$ ,
- $T_{ij} \in T :$  es la tarea del trabajo  $J_i$  asignada al procesador  $P_j$  (variable de decisión),
- $T(J_i) \subset T :$  es el subconjunto de tareas correspondientes al trabajo  $J_i$ ,
- $c(T_{ij}) :$  es el punto inicial del intervalo de tiempo de la tarea  $T_{ij}$ ,
- $t_{ij} :$  es la longitud del intervalo de tiempo asociado a  $T_{ij}$ .

Se minimiza la longitud de la asignación, es decir, el tiempo que corresponde al procesamiento de todas las tareas. De los diferentes métodos que existen para obtener una coloración circular, se utiliza el modelo correspondiente a encontrar una  $r$ -coloración circular.

#### 4.4. Gráficas con pesos unitarios en sus aristas

Sea  $G$  una gráfica sin pesos asignados a sus aristas. El primer que se realiza es hacer su gráfica de líneas  $L(G)$ . El siguiente paso es pintar los vértices de  $L(G)$  con la  $r$ -coloración circular.

Sea  $r \in \mathbb{R}^+$ , se considera un círculo de perímetro  $r$ . Por la Definición 2.5, la función  $c$ , asigna un arco unitario a cada vértice de la gráfica, tal que vértices adyacentes tienen arcos asociados disjuntos. Por tanto el modelo matemático para gráficas sin pesos en sus aristas queda expresado como sigue:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && Z = r \\
 &\text{sujeto a:} && \\
 &1 \leq |c(T_{ij}) - c(T_{ik})| \leq r - 1 && T_{ij}, T_{ik} \in J_i && (M) \\
 &1 \leq |c(T_{ij}) - c(T_{sj})| \leq r - 1 && T_{ij}, T_{sj} \in P_j \\
 &0 \leq c(T_{ij}) \leq r - 1.
 \end{aligned}$$

##### 4.4.1. Búsqueda en vecindades variables

Dado que cada ordenamiento representa un problema de programación lineal y este lo podemos resolver con la ayuda de GLPK, entonces el problema recaé en encontrar el arreglo de menor asignación. Es decir, si el problema tiene  $n$  variables entonces se tiene  $n!$  soluciones factibles. Por ello es que recurrimos aplicar la técnica de búsqueda en vecindades variables.

Una vecindad de una solución es un conjunto de soluciones factibles que se pueden alcanzar mediante un solo movimiento apartir de la solución inicial. Lo fundamental para tener buenos resultados aplicando búsqueda en vecindades variables es su estructura y tamaño. Mientras el tamaño de la vecindad sea grande se tiene que la calidad de las soluciones es mejor. Una vecindad amplia produce una heurística más eficaz [6].

En este algoritmo se utilizan los siguientes mecanismos:

### Solución

Una solución es un ordenamiento  $\pi_1 \in \pi$ , donde  $\pi$  es el conjunto de todas las permutaciones de  $NM$  tareas. Donde  $N$  es el número de trabajos y  $M$  el número de máquinas. La solución inicial se toma de manera aleatoria y se calcula su costo  $f(\pi_1)$ , dada una función de costo  $f$  de  $\pi$  a  $\mathbb{R}^+$ , se resuelve con el modelo de programación lineal, la solución es el perímetro  $r$  del círculo, con lo cual se tiene la  $r$ -coloración circular de  $G$ .

### Estructura de vecindario

Se define como  $\pi$  el ordenamiento de las tareas  $\{T_{11}, T_{12}, \dots, T_{nm}\}$ . La estructura de vecindario  $N_k$ , es definida por  $k$  movimientos de intercambios de 2 tareas. En este programa se define  $k = 1$ , por ajuste de parámetros se obtiene que el tamaño del vecindario es  $k_{max} = 10N$ , donde  $N$  es el número de vértices de la gráfica.

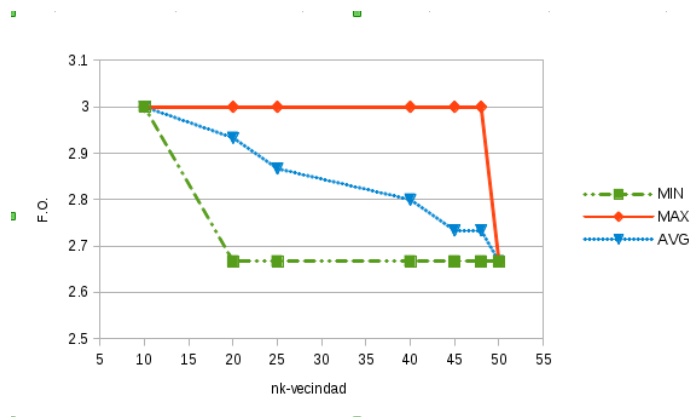


Figura 4.2: Tamaño del vecindario para  $G$  de grado 6.

### Shaking

Se define la técnica 2-OPT, la cual consiste en el intercambio de dos aristas, es decir se generan dos números aleatorios entre 1 y 10, digamos 3 y 8. Si tenemos el arreglo  $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]$  entonces se intercambia el arreglo desde la posición 3 a la posición 8, iniciando desde la posición 8 a la posición 3 y el arreglo queda  $[x_1, x_2, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_9, x_{10}]$ . Se inicia con un número de



iteraciones  $N^2$  y por ajuste de parámetros, el número de búsquedas antes de cambiar de vecindario se fija en  $N^3$  iteraciones.

#### 4.4.2. Software

Con los algoritmos dados en [17] y [3] se calcula el número cromático circular de cierto tipo de gráficas planas y conexas de orden a lo más 8. En el primer artículo se encuentran 23 gráficas de orden 7, mientras en el segundo se encuentran 200 gráficas de orden 8 que cumplen  $\chi_c(G) \leq \chi(G)$ .

En este trabajo se utilizó el software NAUTY, con el cual se pueden generar gráficas conexas de orden  $i$ , donde  $i = 5, \dots, 9$ , no isomorfas. Se implementa el algoritmo descrito para todas las gráficas de orden  $i = 5, \dots, 9$  y se encuentra que existen el mismo número de gráficas que cumplen  $\chi_c(G) \leq \chi(G)$ , para orden 5, 6, 7 y 8, respectivamente. Lo relevante este trabajo, es que se encuentran 261080 gráficas conexas no isomorfas de orden 9 y para cada una de ellas se calculó su número cromático circular y se encuentran almenos 5294 gráficas  $G$  con  $\chi_c(G) \leq \chi(G)$ , ver Cuadro 4.1.

$ V(G) $	$\chi_c(G) < \chi(G)$	Artículo
5	1	[17]
6	2	[17]
7	20	[17]
8	200	[3]
9	5294	JJ

Cuadro 4.1: Número de gráficas con  $\chi_c(G) < \chi(G)$  de grado a lo más 9.

Se procesaron 26 archivos de los cuales cada uno tuvo 10000 gráficas y su tiempo de ejecución fué 5.5 horas por archivo. En una máquina con dos procesadores Intel Xeon E5645 (12M Cache, 2.40 GHz, 5.86 GT/s Intel QPI) Six Core (con 24 subprocesadores), 24GB RAM, 500GB disco duro.

## 4.5. Modelo para gráficas con pesos en sus aristas

En los sistemas de producción las tareas tienen diferentes tiempos de procesamiento, esta situación se modela por medio de una gráfica bipartita con pesos en sus aristas. El modelo a seguir es dado por un ordenamiento de los vértices de  $(G, w)$  entonces se realiza su gráfica de líneas  $L(G, w)$  y se asignan los pesos de las aristas de  $G$  a los vértices de  $L(G, w)$ . Sean  $v_i, v_j \in L(G, w)$  con pesos  $w_i, w_j$ , respectivamente. A la arista  $E(v_i, v_j)$  se le asocia el peso  $W(E(v_i, v_j)) = \frac{w_i + w_j}{2}$ . El peso se considera como la distancia a la que están los puntos medios de los intervalos asociados a  $v_i$  y  $v_j$ .

Sea  $x_m$  la primera variable asociada al primer vértice  $v_m$  del ordenamiento inicial, del conjunto de todos los ordenamientos  $\pi$ . Las restricciones de adyacencia entre vértices  $v_k$  y  $v_l$  están dadas por la doble desigualdad  $W(E(v_k, v_l)) \leq x_k - x_l \leq x_m - W(E(v_k, v_l))$ , la cual se particiona en dos, es decir:

$$\begin{aligned} x_k - x_l &\geq W(E(v_k, v_l)) \\ x_m - x_k + x_l &\geq W(E(v_k, v_l)) \end{aligned}$$

---

**Algoritmo 4.1** Algoritmo de búsqueda en vecindades variables

---

**Entrada:**  $G = (V, E)$

**Salida:**  $r, x_1, x_2, \dots, x_N$

---

- Seleccionar el conjunto de estructuras de vecindarios  $N_k, k = 1, \dots, k_{max}$ .

$x \leftarrow \text{GenerarSoluciónInicial}()$ .

Mientras no se cumpla condición de paro

- $k \leftarrow 1$

Mientras  $k < k_{max}$

- $x' \leftarrow \text{GenerarAleatoria en } N_k(x).$  shaking

- $x'' \leftarrow \text{Búsqueda local}(x').$  búsqueda local

- *if*  $f(x'') < f(x)$  Mover.

$x \leftarrow x''$

$k \leftarrow 1$

else

$k \leftarrow k + 1$

cierre if.

cierre mientras.

cierre mientras.

---

Por lo tanto el modelo de programación lineal para el ordenamiento  $[x_m, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{|V(G)|}]$  de una gráfica  $(G, w)$  con pesos en sus aristas, está dado en función de su gráfica de líneas  $L(G, w)$ , como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_m \\ \text{sujeto a:} & \\ & x_i - x_{i-1} \geq 0 \quad \text{donde } i = 3 \dots |V(G)| \\ & x_m - x_{|V(G)|} \geq 0 \quad \text{última posición} \\ & x_k - x_l \geq W(E(v_k, v_l)) \quad \text{para toda } (v_k, v_l) \in E(G) \\ & x_i + x_l - x_m \geq W(E(v_k, v_l)) \quad \text{para toda } (v_k, v_l) \in E(G) \end{array}$$

#### 4.5.1. Algoritmo genético

Para una gráfica de orden 16, el Algoritmo 4.1 encuentra la coloración circular más pequeña en 20 minutos, mientras que el tiempo que tarda con una gráfica de orden 25 es 6 horas, en un procesador AMD A6-4400M APU 2.70 Ghz. Dado que para los problemas de asignación aumenta rápidamente el tiempo empleado en resolverlos, dependiendo del número de tareas, aquí realizamos una combinación del problema de programación lineal con un algoritmo genético, en la cual se diversifica la búsqueda del óptimo.

Los algoritmos genéticos son una rama de la inteligencia artificial que imitan la evolución biológica para resolver problemas de búsqueda y optimización. Estos se basan en el proceso genético de los organismos vivos, [18].

Los algoritmos genéticos trabajan con una población de individuos, cada individuo representa una solución factible a un determinado problema. A cada individuo se le asigna un valor relacionado con la aptitud de dicha solución. Dos características de estos algoritmos son: Cada ejecución del algoritmo puede dar soluciones distintas y son algoritmos de búsquedas múltiple, esto quiere decir que dan varias soluciones, unas más calificadas que otras. Este tipo de algoritmos descarta inmediatamente espacios malos al tener una convergencia rápida. En esta técnica se emplean tres mecanismos: selección, cruza y mutación, ver [6].

#### Selección

Es el operador genético que permite elegir las configuraciones de la población actual que deben participar de la generación de las configuraciones de la nueva población (nueva generación).

#### Cruza

Es el mecanismo que permite pasar información genética de un par de cromosomas originales a sus descendientes, o sea, saltar de un espacio de búsqueda a otro, generando de esta forma diversidad genética.

### Mutación

Permite realizar la intensificación en un espacio en particular caminando a través de vecinos. Significa intercambiar el valor de un gene de un cromosoma en una población. En forma aleatoria, se elige un cromosoma como candidato, se genera un número aleatorio y si es menor que la tasa de mutación ( $\rho < Tm$ ), entonces se realiza la mutación. La tasa de mutación se elige del rango  $[0.001, 0.05]$ .

---

#### Algoritmo 4.2 Algoritmo genético

---

**Entrada:**  $(G, w) = (V, E, w)$

**Salida:**  $r, x_1, x_2, \dots, x_N$

---

- Codificar variables y definir el método de selección
  - Generar (aleatoriamente) una población inicial.
  - Calcular la aptitud de cada individuo.
  - Seleccionar mediante torneo binario.
  - Aplicar operadores genéticos (cruza, mutación y elitismo) para generar la siguiente población.
  - Ciclar hasta que cierta condición se satisfaga.
- 

En forma aleatoria se conformó una población inicial, en donde cada cromosoma representa un ordenamiento de variables  $[X_i, X_1, \dots, X_{NM}]$  que están asociadas al ordenamiento de vértices correspondientes. Cada gen indica el punto medio del arco asociado al vértice correspondiente. Donde  $NM$  es el número de aristas de la gráfica  $G$ .

### Algoritmos $G1$ y $G2$

#### Ajuste de parámetros

La **Población inicial** se inicia aleatoriamente, con tamaño  $Tam\ Pobl = 10$ , se va cambiando a los valores  $Tam\ Pobl = 10, 50, 70, 100, 150, 180, 200$  y  $250$ . Se fija a  $200$  por tener un cambio significativo, ver Figura (4.3).

**Método de selección.** Mediante torneo bianario, se eligen de manera aleatoria dos cromosomas diferentes  $C[i]$ ,  $C[j]$  y en base a su aptitud se elige el cromosoma más apto, llamado Padre 1, con tasa de cruza  $Tc = 0.7$ , ver Figura (4.4). Análogamente se obtiene padre 2.

**Cruza** Se intercambian cadenas lineales con la técnica Cruza de Orden Lineal (LOX) de los padres 1 y 2, ver Figura (4.5).

---

Los datos utilizados por el algoritmo con mutación por inserción son:

Población inicial:	200 cromosomas (aleatoria)
Número de genes por cromosoma:	$NM$
Proceso de selección:	Torneo binario
Tipo de crossover:	Cruza de Orden Lineal (LOX)
Tasa de crossover:	$Tc = 0.7$
Tipo de mutación:	Inserción
Tasa de mutación:	$Tm = 0.065$
Máximo número de generaciones:	150
Criterio de parada:	150 generaciones.

Cuadro 4.2: Algoritmo con mutación por inserción.

Los datos utilizados por el algoritmo con mutación por swap son:

Población inicial:	200 cromosomas (aleatoria)
Número de genes por cromosoma:	$NM$
Proceso de selección:	Torneo binario
Tipo de crossover:	Cruza de Orden Lineal (LOX)
Tasa de crossover:	$Tc = 0.7$
Tipo de mutación:	Swap
Tasa de mutación:	$Tm = 0.01$
Máximo número de generaciones:	150
Criterio de parada:	150 generaciones.

Cuadro 4.3: Algoritmo con mutación por swap.

**Mutación por inserción** Cuando se aplica la mutación a un cromosoma, se generan aleatoriamente dos números y lo que procede es mover uno al final y recorrer una posición a la izquierda los demás hasta llegar al segundo número, ver Figura (4.6). La tasa de mutación  $Tm = 0.065$  es definida por ajuste de parámetros, ver Figura (4.7).

**Mutación por swap** Cuando se aplica la mutación al cromosoma, se generan aleatoriamente dos números y lo que procede intercambiar posiciones, ver Figura (4.8). La tasa de mutación es variada  $Tm = 0.0001, 0.0003, 0.001, 0.0018, 0.0031, 0.00641, \mathbf{0.01}, 0.0316, 0.065, 0.1$ . Se define  $Tm = 0.01$  por ajuste de parámetros, ver Figura (4.9).

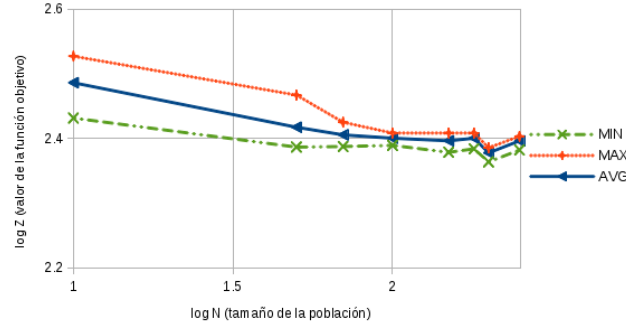


Figura 4.3: Población inicial.

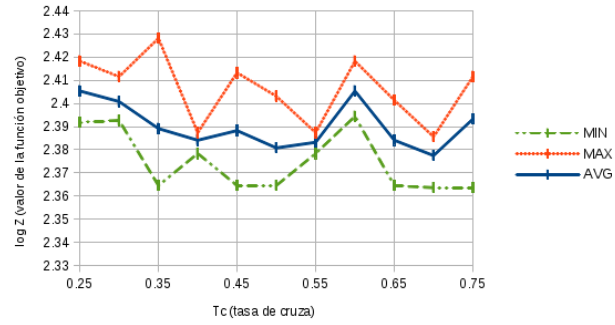


Figura 4.4: Tasa de cruce.

### 4.5.2. Ejemplo

El siguiente ejemplo es tomado de [21], este dice lo siguiente:

Sean  $T_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{23}, T_{33}, T_{41}, T_{42}$  siete tareas. Supóngase que tenemos tres máquinas diferentes  $\{P_1, P_2, P_3\}$  y tres operadores  $\{P_4, P_5, P_6\}$ . Cada tarea  $T_{ij}$  es procesada en una máquina por un operador, i.e.,  $T_{11} = \{P_1, P_4\}$ ,  $T_{12} = \{P_2, P_5\}$ ,  $T_{22} = \{P_2, P_5\}$ ,  $T_{23} = \{P_3, P_6\}$ ,  $T_{33} = \{P_3, P_4\}$ ,  $T_{41} = \{P_1, P_6\}$  y  $T_{42} = \{P_2, P_5\}$ . El tiempo de procesamiento de cada tarea es  $t_{11} = 1$ ,  $t_{12} = 1$ ,  $t_{22} = 1$ ,  $t_{23} = 1$ ,  $t_{33} = 1.5$ ,  $t_{41} = 0.5$ ,  $t_{42} = 0.5$ . Encontrar una asignación que ejecute todas las tareas tal que el tiempo sea mínimo.

Este problema de asignación es modelado con una gráfica de asignación, donde cada arista de la gráfica representa una tarea asociada a algún trabajo, ver *a*) de la Figura (4.10). A cada tarea se le asocia una variable, es decir:  $T_{11} = x_1$ ,  $T_{12} = x_2$ ,  $T_{22} = x_3$ ,  $T_{23} = x_4$ ,  $T_{33} = x_5$ ,  $T_{42} = x_6$ ,  $T_{41} = x_7$ . Tomamos el siguiente ordenamiento de los vértices de la gráfica  $[v_1, v_6, v_4, v_2, v_7, v_5, v_3]$ . Las siguientes restricciones de ordenamiento están dadas por el orden de los vértices:

$$x_4 \geq x_6 \Rightarrow x_4 - x_6 \geq 0$$

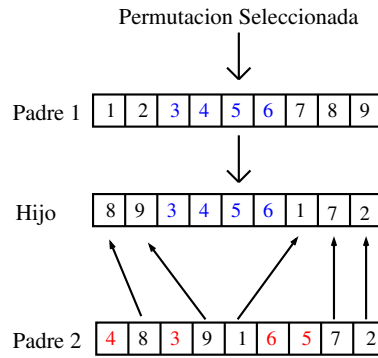


Figura 4.5: Cruza de Orden Lineal.

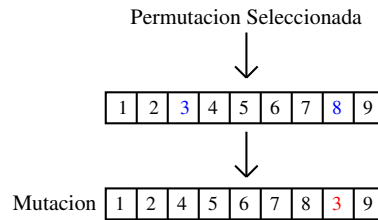


Figura 4.6: Mutación por Inserción.

$$\begin{aligned}
 x_2 &\geq x_4 \Rightarrow x_2 - x_4 \geq 0 \\
 x_7 &\geq x_2 \Rightarrow x_7 - x_2 \geq 0 \\
 x_5 &\geq x_7 \Rightarrow x_5 - x_7 \geq 0 \\
 x_3 &\geq x_5 \Rightarrow x_3 - x_5 \geq 0 \\
 x_3 &\geq x_1 \Rightarrow x_1 - x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Las restricciones por adyacencia de vértices nos dice que las variables están a distancia el peso de la arista entre vértices. Entonces las restricciones de adyacencia son dadas por:

$$\begin{aligned}
 1 &\leq |x_1 - x_2| \leq x_1 - 1 \\
 0.75 &\leq |x_1 - x_7| \leq x_1 - 0.75 \\
 1.25 &\leq |x_1 - x_5| \leq x_1 - 1.25 \\
 0.75 &\leq |x_6 - x_2| \leq x_1 - 0.75 \\
 0.5 &\leq |x_6 - x_7| \leq x_1 - 0.5 \\
 0.75 &\leq |x_6 - x_3| \leq x_1 - 0.75 \\
 0.75 &\leq |x_4 - x_7| \leq x_1 - 0.75 \\
 1.25 &\leq |x_4 - x_5| \leq x_1 - 1.25 \\
 1 &\leq |x_4 - x_3| \leq x_1 - 1 \\
 1 &\leq |x_2 - x_3| \leq x_1 - 1
 \end{aligned}$$

El objetivo de resolver el problema de programación lineal es minimizar la longitud del círculo Euclideano al que son enviados los vértices. La solución de este problema lineal es  $x_1 = 2.75$ ,  $x_2 = 1$ ,

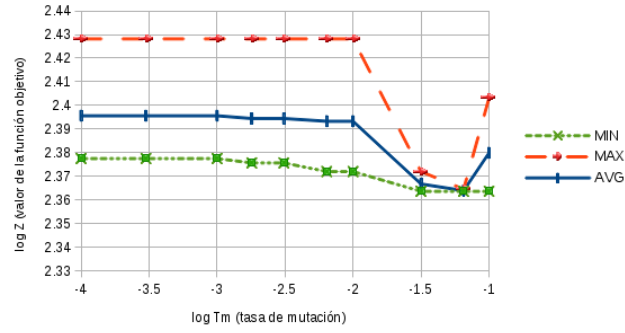


Figura 4.7: Tasa de Mutación.

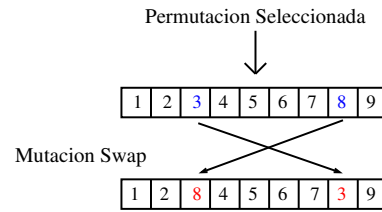


Figura 4.8: Mutación por swap.

$x_3 = 2$ ,  $x_4 = 0.25$ ,  $x_5 = 1.5$ ,  $x_6 = 0$  y  $x_7 = 1$ . Ahora dado que esta solución encuentra los puntos medios de los arcos asignados, entonces la solución cambia a  $x'_1 = 2.25$ ,  $x'_2 = 0.5$ ,  $x'_3 = 1.5$ ,  $x'_4 = 2.75$ ,  $x'_5 = 0.75$ ,  $x'_6 = 0.25$  y  $x'_7 = 0.5$ , la cual es solución factible. Se observa que ninguna variable inicia en el punto 0, la más cercana es la variable  $x_6$ . Así que recorremos todas las variables 0.25 unidades al contrario de las manecillas del reloj sobre la circunferencia, ver la Figura (4.11). Por tanto obtenemos una solución factible y comparada con [21], la solución es óptima.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_1 \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & x_4 - x_6 \geq 0 \\
 & x_2 - x_4 \geq 0 \\
 & x_7 - x_2 \geq 0 \\
 & x_5 - x_7 \geq 0 \\
 & x_3 - x_5 \geq 0 \\
 & x_1 - x_3 \geq 0 \\
 & x_1 - x_2 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 1 \\
 & x_1 - x_7 \geq 0.75 \\
 & x_7 \geq 0.75 \\
 & x_1 - x_5 \geq 1.25 \\
 & x_5 \geq 1.25
 \end{aligned}$$





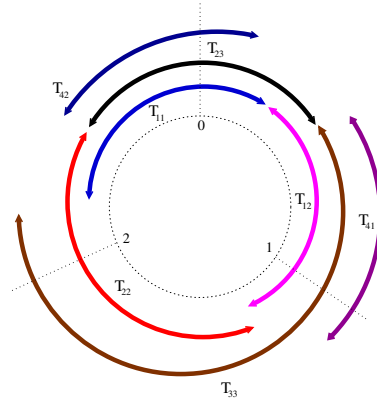


Figura 4.11: Solución del problema de programación lineal.

### 4.5.3. Resultado

Para evaluar del algoritmo, se implementa en las instancias open shop del banco de instancias propuesto por E. Taillard (ver página <http://mistic.heig-vd.ch/taillard/problemes.dir/ordonnancement.dir/ordonnancement.html>).

Instancia	$\Delta(G)$	$\chi'$	$\chi'_c(SVV)$	$\chi'_c(AG)$	$\chi'_c(AGSwap)$
4J4M1	186	<b>193</b>	212	212	212
4J4M2	229	236	231.5	<b>231</b>	233
4J4M3	262	271	<b>266.5</b>	272	272
4J4M4	245	250	<b>245</b>	247	249.5
4J4M5	287	295	<b>289</b>	296	293
4J4M6	185	189	<b>185</b>	<b>185</b>	194.5
4J4M7	197	201	<b>197</b>	198.5	202
4J4M8	212	217	<b>213</b>	222	222
4J4M9	258	261	<b>258</b>	264.5	269.5
4J4M10	213	217	220.5	220.5	220.5
5J5M1	295	300	<b>295</b>	339	335

Cuadro 4.4: Tabla de resultados de las instancias propuestas por E. Taillard.

Tiempo promedio en segundos 40 seg. en procesador AMD A6-4400M APU 2.70 Ghz.

# Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se analizó una generalización del índice cromático de una gráfica  $G$ , conocida como el índice cromático circular  $\chi'_c(G)$ . Se dieron a conocer dos formulaciones de este concepto que son equivalentes y se conceptualizó al índice cromático circular  $\chi'_c(G)$  como la coloración circular mínima de las aristas de  $G$ . Se hizo un recuento de la información de un gran número de familias de gráficas cuyo índice cromático circular es conocido, en particular aquéllas en las cuales  $\chi'_c(G)$  no coincide con  $\chi'(G)$ . Puede verse un resumen de las familias estudiadas en el Cuadro (3.1).

Se hizo una revisión del estado del arte acerca del estudio de los snarks, que son gráficas cúbicas sin puentes que no tienen una 3-coloración de sus aristas. Se sabe que los snarks tienen  $\chi'(G) = 4$ , pero cuando se toma el número cromático circular esta área de estudio se enriquece con una gran diversidad de resultados, muchas familias de snarks son caracterizados por su índice cromático circular. El snark con menor número de vértices existente es la gráfica de Petersen que data de 1898 y una primera etapa de este estudio termina con el importante trabajo de R. Isaacs de 1975, ver [16].

En una segunda etapa del estudio de los snarks, se introduce el concepto de pegado de gráficas por medio de trayectorias de longitud  $k$ . Desde este enfoque se puede ver el pegado de bloques fundamentales de los snarks de Blanuša tipo 1 y de Goldberg como pegados de bloques fundamentales por trayectorias de longitud 1 y 2, respectivamente. Una de las contribuciones de este trabajo es la expansión de las familias de Blanuša tipo 1 y de Goldberg tomando ciclos de longitud  $2s + 1$  para formar los bloques fundamentales,  $s \in \mathbb{Z}^+$ . Éstos se pegan por trayectorias de longitud  $k = 1, 2$ , respectivamente, siguiendo la estructura del pegado cíclico de bloques.

Dado que calcular el índice cromático de una gráfica es un problema NP-completo, saber cuantas y cuales gráficas de un cierto orden cumplen que  $\chi_c(G) < \chi(G)$  es importante en la teoría de gráficas. Aquí se contribuyó en la búsqueda exhaustiva de las gráficas que cumplen la desigualdad estricta, habiendo obtenido que de 261080 gráficas conexas no isomorfas de orden 9, existen al menos 5294 de ellas que tienen número cromático circular menor a su número cromático.

Para resolver los problemas de asignación cíclica de trabajos a máquinas se construyó un modelo mediante una gráfica bipartita  $G$  con una función de peso  $w$  asociadas a sus aristas. La solución óptima del problema consiste en encontrar el índice cromático circular para la gráfica  $(G, w)$ . Utilizando el modelo de Mate Banary [3] modificando la heurística de búsqueda Tabú por la de búsqueda en vecindades variables, se aproxima el índice cromático circular de la gráfica  $(G, w)$ . En este modelo se combina la implementación de un problema de programación lineal y la heurística mencionada para cada ordenamiento de los vértices de la gráfica de asignación, eligiendo la ordenación inicial en forma aleatoria.

En este trabajo se hace una aproximación del índice cromático circular como se explicó en el párrafo anterior. Los resultados reportados en el banco de instancias propuesto por E. Taillard (ver página <http://mistic.heig-vd.ch/>), representan los índices cromáticos de cada gráfica con un número fijo de aristas. Dado que los que aquí se obtuvieron son valores menores o iguales a los valores exhibidos por Taillard, los valores de Taillard fungen como cotas superiores para el índice cromático circular. Con los cálculos implementados en este trabajo se obtuvo una coloración circular por aristas para las gráficas de un orden dado, que era lo que se deseaba. Asimismo, se observa que el método no es eficiente si el número de aristas crece, debido a que el tiempo de procesamiento también crece de manera exponencial. Para evitar este problema, se implementan otros dos algoritmos que consisten en combinar un algoritmo genético con la resolución de problemas de programación lineal. Cada uno de ellos reduce el tiempo de ejecución y dichas soluciones encontradas son también una aproximación al índice cromático circular.

El trabajo futuro tiene dos enfoques, uno totalmente teórico y otro de aplicación a la resolución de problemas de asignación.

En la parte teórica, considero que el estudio de los snaks es de gran interés y aún no se ha agotado su campo de investigación. Se pueden encontrar nuevos procedimientos de construir bloques fundamentales y otras operaciones de pegado de los mismos para hallar nuevas familias de snaks. Otra cuestión interesante es probar o dar un contraejemplo a la conjetura de Tutte de 1969, que dice que todo snark tiene como menor a la gráfica de Petersen.

Por otra parte, en el segundo enfoque se pueden implementar otras heurísticas para resolver problemas de asignación cíclica con un mayor número de tareas. Para llevar acabo esto, se debe hacer una búsqueda exhaustiva en el estado del arte de los distintos métodos. Se considera interesante en la investigación que se pueda aplicar el índice cromático circular a problemas reales, debido a que ahora sólo se ha calculado el índice cromático para gráficas que aparecen en la literatura especializada en el tema. Será de utilidad formar un banco de problemas reales que reflejen situaciones que se puedan modelar como problemas de asignación, más particularmente, designados como open shop.

José de Jesús, Febrero 2016.

---

# Referencias

---

- [1] Afshani P., Ghandehari M., Ghandehari M., Hatami H., Tusserkani R., Zhu X.: Circular chromatic index of graphs of maximum degree 3, *Journal Graph Theory* 49 (2005), 325–335.
- [2] Appel K., Haken W., Koch J.: Every planar map is four-colorable, *Bulletin of the American Mathematical Society* 82 (1976), 429–567.
- [3] Barany M., Tuza Z.: Circular coloring of graphs via linear programming and tabu search, *Central European Journal of Operations Research* 23 (2014), 833–848.
- [4] Biggs N., Lloyd E., Wilson R.: *Graph Theory 1736 – 1936*, Oxford University Press, New York, the United States 1976.
- [5] Bondy J., Hell P.: A note on the star chromatic number, *Journal of Graph Theory* 14 (1990), 479–482.
- [6] Cruz M., Díaz O.: Un mecanismo de vecindad con búsqueda local y algoritmo genético para el problema de transporte con ventanas de tiempo basado en una técnica de satisfacción de restricciones, *Computación y Sistemas* 13 (2010), 257–272.
- [7] Deuber W. and Zhu X.: Circular coloring of weighted graphs, *Journal Graph Theory* 23 (1994), 365–376.
- [8] Garner M.: Mathematical games column, *Scientific American* 234 (1976), 126–130.
- [9] Ghebleh M., Král D., Norine S., Thomas R.: The circular chromatic index of flower snarks, *The Electronic Journal of Combinatorics* 13 (2006), 1–7.
- [10] Ghebleh M.: Theorems and computations in circular colourings of graphs, tesis de doctorado of philosophy, Simon Fraser University, Vancouver, Canadá, 2007.
- [11] González T., Sahni S.: Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time, *Journal of The Association for Computing Machinery* 23 (1976), 665–679.
- [12] González T.: Unit execution time shop problems, *Mathematics of Operations Research* 7 (1982) 57–66.
- [13] González T.: Open shop scheduling, In: Leung, J. (ed.) *Handbook of scheduling: Algorithms, models and performance analysis*, 6-1–6-14. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, the United State of America, 2004.

- 
- [14] Guichard R.: Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number, *Journal of Graph Theory* 17 (1993), 129–134.
  - [15] Herrera S.: La coloración circular de gráficas, Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Tlaxcala, 2007.
  - [16] Isaacs R.: Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable, *American Mathematical Monthly* 82 (1975), 221–239.
  - [17] Kemnitz A., Wellmann P.: Circular chromatic numbers of certain planar graphs and small graphs, *Congressus Numerantium* 169 (2004), 199–209.
  - [18] Liaw C.: A hybrid genetic algorithm for the open shop scheduling problem, *European Journal of Operational Research* 124 (2000), 28–42.
  - [19] Malkawi M., Hassan M., Hassan O.: A new exam scheduling algorithm using graph coloring, *The International Arab Journal of Information Technology* 5 (2008), 80–87.
  - [20] Mazák J.: Circular chromatic index of type 1 Blanuša snarks, *Journal of Graph Theory* 59 (2008), 89–96.
  - [21] Modarres M., Ghandehari M.: Applying circular coloring to open shop scheduling, *Scientia Iranica* 15 (2008), 652–660.
  - [22] Mohammad G.: The circular chromatic index of Goldberg snarks, *Discrete Mathematics* 307 (2007), 3220–3225.
  - [23] Nadolski A.: Circular coloring of graphs, *Graph Colorings, Contemporary Mathematics* 352, American Mathematical Society (2004) 123–137.
  - [24] Nadolski A.: The circular chromatic index of some Class 2 graphs, *Discrete Mathematics* 307, (2007), 1447–1454.
  - [25] Rodríguez M., Herrera S.: La coloración circular de gráficas. Una aplicación al problema de cruces vehiculares, *Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana* 58 (2014), 11–30.
  - [26] Solot Ph., De Werra D.: Some graph-theoretical models for scheduling in automated production systems, *Networks* 23 (1993), 651–600.
  - [27] Vince. A.: Star chromatic number, *Journal of Graph Theory* 12 (1998), 551–559.
  - [28] Vizing. V.: On an estimate of the chromatic class of a p-graph, *Diskret. Analiz* 3 (1964), 25–30.
  - [29] Watkins J.: Snarks, *Annals New York Academy of Sciences* 576 (1989), 606–622.
  - [30] Zhu X.: Star chromatic numbers and products of graphs, *Journal Graph Theory* 16 (1992), 557–569.
  - [31] Zhu X.: Circular chromatic number: a survey, *Discrete Mathematics* 229 (2001), 371–410.
  - [32] Zhu X.: Recent developments in circular colourings of graphs, In: *Topics in discrete mathematics*, Springer, New York (2006), 497–550.
-